

Physique

MPSI – PTSI

TESTS DE COURS

Anne Muller-Clausset

Professeur en PCSI au lycée
La Martinière-Monplaisir
à Lyon

François Clausset

Professeur en MP au lycée
Jean Perrin à Lyon

DUNOD



Visiter notre Forum : <http://prepa-book.forummaroc.net/>

Visiter notre page :

<https://www.facebook.com/bibliotheque.electronique.des.classes.prepa>

<https://www.facebook.com/groups/bibliotheque.electronique.des.classes.prepa/>

Illustration de couverture :
© puentes – Fotolia.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2011
ISBN 978-2-10-056990-8

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^e et 3^e a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

PARTIE 1

OPTIQUE

CHAPITRE 1 • LOIS DE SNELL-DESCARTES, DIOPTRÉS ET MIROIRS	2
CHAPITRE 2 • LENTILLES MINCES	6
CORRIGÉS	10

PARTIE 2

ÉLECTRODYNAMIQUE ET ÉLECTRONIQUE

CHAPITRE 3 • LOIS DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE	26
CHAPITRE 4 • CIRCUITS LINÉAIRES EN RÉGIME PERMANENT	32
CHAPITRE 5 • CIRCUITS LINÉAIRES EN RÉGIME TRANSITOIRE	36
CHAPITRE 6 • CIRCUITS LINÉAIRES EN RÉGIME SINUSOÏDAL	41
CHAPITRE 7 • QUADRIPÔLES 1	46
CHAPITRE 8 • QUADRIPÔLES 2	51
CHAPITRE 9 • AMPLIFICATEUR OPÉRATIONNEL	55
CORRIGÉS	59

PARTIE 3

MÉCANIQUE

CHAPITRE 10 • CINÉMATIQUE DU POINT	104
--	-----

CHAPITRE 11 • LOIS DE LA DYNAMIQUE EN RÉFÉRENTIEL GALILÉEN	108
CHAPITRE 12 • ÉNERGIE	113
CHAPITRE 13 • ÉQUILIBRES	118
CHAPITRE 14 • OSCILLATEURS	122
CHAPITRE 15 • THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE	126
CHAPITRE 16 • MOUVEMENTS DANS UN CHAMP NEWTONIEN	130
CHAPITRE 17 • CINÉMATIQUE DU CHANGEMENT DE RÉFÉRENTIEL	134
CHAPITRE 18 • RÉFÉRENTIELS NON GALILÉENS	138
CHAPITRE 19 • SYSTÈME DE DEUX POINTS MATÉRIELS (MPSI)	143
CORRIGÉS	147

PARTIE 4

THERMODYNAMIQUE

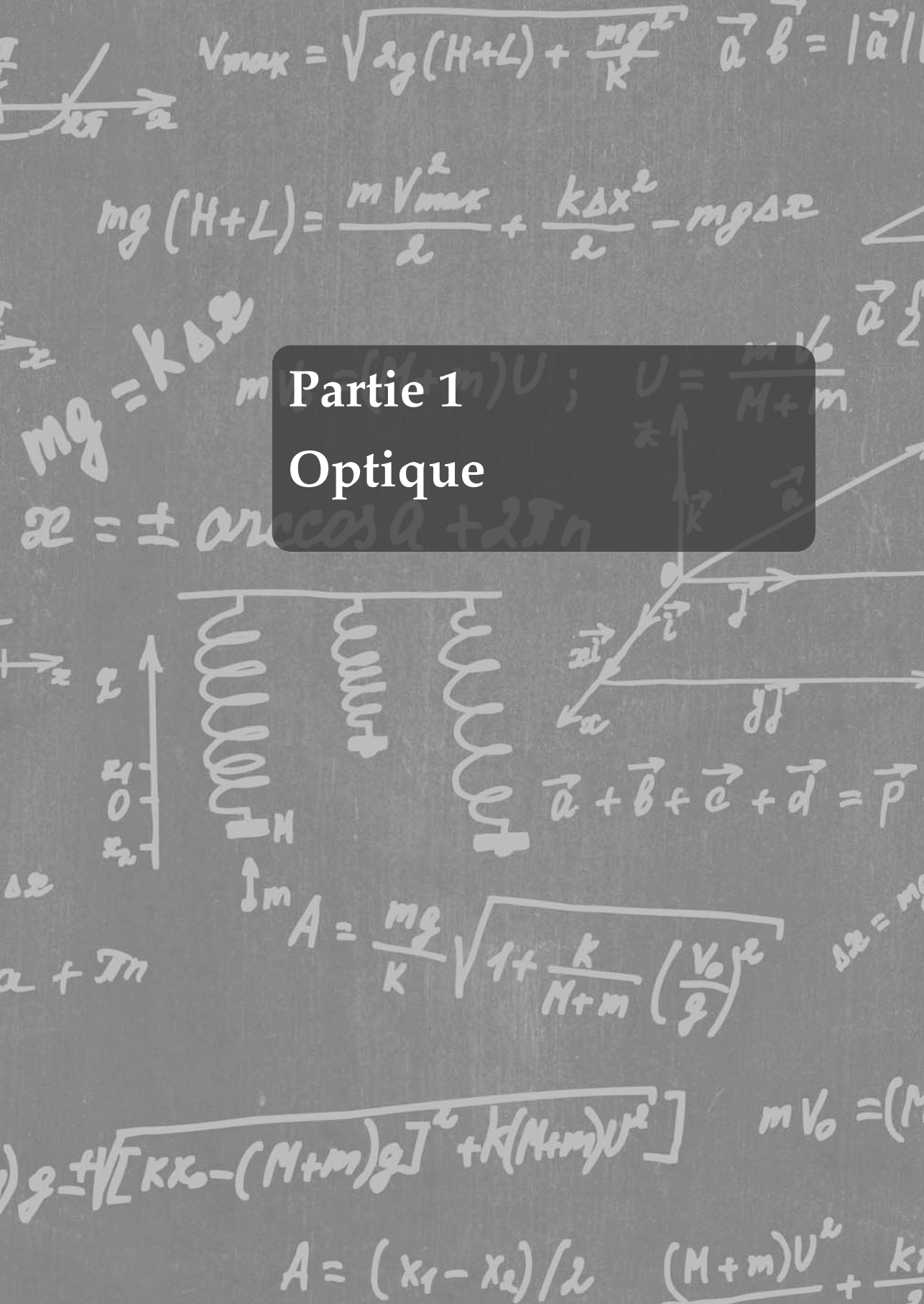
CHAPITRE 20 • TEMPÉRATURE – GAZ PARFAIT – THÉORIE CINÉTIQUE	218
CHAPITRE 21 • PRESSION – STATIQUE DES FLUIDES	221
CHAPITRE 22 • PREMIER PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE	225
CHAPITRE 23 • SECOND PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE	229
CHAPITRE 24 • CHANGEMENTS D'ÉTAT	233
CHAPITRE 25 • MACHINES THERMIQUES	237
CORRIGÉS	242

PARTIE 5
ÉLECTROMAGNÉTISME

CHAPITRE 26 • DISTRIBUTIONS DE CHARGES – CHAMP ÉLECTROSTATIQUE	276
CHAPITRE 27 • FLUX ET CIRCULATION DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE	280
CHAPITRE 28 • MOUVEMENTS DE PARTICULES CHARGÉES	284
CHAPITRE 29 • CHAMP MAGNÉTOSTATIQUE	288
CHAPITRE 30 • DIPÔLES (MPSI)	291
CORRIGÉS	294

Partie 1

Optique



1

Lois de Snell-Descartes, dioptries et miroirs

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

- les lois de la réflexion et de la réfraction ;
- les notions de stigmatisme, aplanétisme, réalité, virtualité, foyers ;
- les formules de conjugaison des systèmes optiques simples (miroirs plans, dioptries plans, miroirs sphériques) ;
- les constructions objet-image et rayon incident-rayon réfléchi ou émergent pour ces systèmes.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication.

- 1 Une source lumineuse ponctuelle est placée en un point A sur l'axe de symétrie d'un système optique centré ; on constate l'existence d'un point de convergence A' des rayons lumineux après traversée du système optique.

☐ V ☐ F a. Le système optique est stigmatique pour le couple (A, A') .

☐ V ☐ F b. A' est l'image de A par le système optique.

☐ V ☐ F c. Le système optique est aplanétique pour le couple (A, A') .

☐ V ☐ F d. Si on place la source lumineuse en A' , les rayons convergeront en A .
- 2 Un rayon lumineux passe de l'air (milieu homogène d'indice $n_0 = 1$) à l'eau (milieu homogène d'indice $n_1 = 1,33$) ; l'angle d'incidence α_0 est non nul.

☐ V ☐ F a. La lumière se propage en ligne droite dans chaque milieu.

☐ V ☐ F b. Le rayon réfracté s'écarte de la normale à l'interface air-eau.

☐ V ☐ F c. Pour certaines incidences, il peut y avoir réflexion totale de la lumière.

- 3** Soit un dioptre plan de sommet O séparant deux milieux d'indices n_1 et n_2 .
- ☐ V ☐ F **a.** Le système est rigoureusement stigmatique pour tout point de l'espace.
- ☐ V ☐ F **b.** Le système est rigoureusement aplanétique pour tout point de l'espace.
- ☐ V ☐ F **c.** Dans les conditions de Gauss, la formule de conjugaison est $n_1 \overline{OA} = n_2 \overline{OA'}$.
- ☐ V ☐ F **d.** Le grandissement transversal est égal à 1.
- ☐ V ☐ F **e.** Le système est afocal.
- 4** Soit un miroir sphérique de centre C et de sommet S .
- ☐ V ☐ F **a.** Dans certaines conditions le système est stigmatique et aplanétique.
- ☐ V ☐ F **b.** A et A' étant deux points conjugués sur l'axe, leurs positions sont liées par : $\frac{1}{\overline{CA'}} + \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS}}$
- ☐ V ☐ F **c.** A et A' étant deux points conjugués sur l'axe, leurs positions sont liées par : $\frac{1}{\overline{SA'}} - \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}}$
- ☐ V ☐ F **d.** Les foyers sont symétriques par rapport au sommet du miroir.

Consignes

QCM

Il peut y avoir, pour certaines questions, deux propositions exactes.

Il sera utile de s'aider de constructions géométriques pour répondre aux questions.

On supposera que les miroirs sphériques sont utilisés dans les conditions de Gauss.

- 5** Une source lumineuse ponctuelle est située sur l'axe d'un disque réfléchissant de diamètre D , à une distance d du disque ; quelle est la relation vérifiée par l'ouverture angulaire θ du cône lumineux réfléchi ?
- ☐ **a.** $\tan(\theta) = \frac{D}{d}$ ☐ **b.** $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{D}{2d}$
- ☐ **c.** $\sin(\theta) = \frac{D}{d}$ ☐ **d.** $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{D}{2d}$

- 6** Deux miroirs plans font entre eux un angle de $\theta = \frac{3\pi}{4}$; un faisceau parallèle frappe le premier miroir sous une incidence $\alpha = \frac{\pi}{3}$; de quel angle β a tourné la lumière après les deux réflexions ?
- ☐ a. $\beta = \frac{\pi}{4}$ ☐ b. $\beta = \frac{\pi}{3}$ ☐ c. $\beta = \frac{\pi}{2}$ ☐ d. $\beta = \frac{4\pi}{3}$
- 7** Un rayon lumineux passe de l'eau à l'air; son angle d'incidence est égal à 45° . L'indice de l'eau vaut $n_1 = 1,33$ et celui de l'air $n_0 = 1$.
- ☐ a. Le rayon n'est pas dévié. ☐ b. Il y a réflexion totale.
☐ c. L'angle d'émergence vaut $32,1^\circ$. ☐ d. L'angle d'émergence vaut $70,1^\circ$.
- 8** Soit un dioptrique plan séparant deux milieux successifs d'indices respectifs n_1 (1^{er} milieu) et n_2 (2^e milieu); $n_1 > n_2$. Soit une source lumineuse placée en A dans le milieu d'indice n_1 à une distance d du dioptrique.
- ☐ a. On peut observer une image A' sur un écran situé après le dioptrique.
☐ b. L'image A' est située après le dioptrique, à une distance $d' = \frac{n_1}{n_2}d$.
☐ c. On peut observer une image A' sur un écran situé entre A et le dioptrique.
☐ d. L'image A' est située avant le dioptrique, à une distance $d' = \frac{n_2}{n_1}d$.
- 9** Soit un miroir sphérique concave.
- ☐ a. Ses foyers objet et image sont réels.
☐ b. Son foyer objet est réel et son foyer image est virtuel.
☐ c. Ses foyers objet et image sont virtuels.
☐ d. Son foyer objet est virtuel et son foyer image est réel.
- 10** Soit une source lumineuse quasi ponctuelle située en A à 30 cm d'un miroir; le point de convergence des rayons réfléchis par le miroir est observé sur un écran légèrement décalé par rapport à la source, situé à 30 cm du miroir.
- ☐ a. Le miroir peut être plan.
☐ b. Le miroir peut être sphérique concave.
☐ c. Le miroir peut être sphérique convexe.
☐ d. L'expérience décrite n'est pas réalisable.

- 11** Un miroir sphérique concave de sommet S et de centre C a pour rayon $R = |\overline{SC}| = 1$ m. Un observateur situé à 75 cm du miroir se regarde dans le miroir.
- ☐ a. L'image est réelle et droite. ☐ b. L'image est réelle et renversée.
☐ c. L'image est virtuelle et droite. ☐ d. L'observateur ne peut pas voir l'image.
- 12** Un miroir sphérique convexe de sommet S et de centre C a pour rayon $R = |\overline{SC}| = 1$ m. Un observateur situé à 50 cm du miroir se regarde dans le miroir.
- ☐ a. L'image est virtuelle et droite. ☐ b. L'image est à l'infini.
☐ c. L'image est réelle et renversée. ☐ d. L'observateur ne peut pas voir l'image.
- 13** Un miroir sphérique donne d'un objet réel situé à $d = 1,5$ m du sommet une image virtuelle droite deux fois plus petite que l'objet. Déterminer la nature et le rayon $R = |\overline{SC}|$ de ce miroir.
- ☐ a. Le miroir est concave ; $R = 1$ m. ☐ b. Le miroir est convexe ; $R = 1$ m.
☐ c. Le miroir est concave ; $R = 3$ m. ☐ d. Le miroir est convexe ; $R = 3$ m.
- 14** Soit un miroir sphérique concave tel que $\overline{FS} = 50$ cm ; un objet AB est situé à mi-distance entre le sommet et le foyer ; déterminer par construction la position de l'image $A'B'$ et le grandissement.
- ☐ a. $\overline{SA'} = 0,25$ m ☐ b. $\overline{SA'} = 0,5$ m ☐ c. $\gamma = -2$ ☐ d. $\gamma = 2$
- 15** Soit un miroir sphérique convexe tel que $\overline{SF} = 50$ cm ; où est situé l'objet donnant une image réelle à $d = 1$ m du sommet ?
- ☐ a. $\overline{SA} = 33,3$ cm ☐ b. $\overline{SA} = 1$ m
☐ c. $\overline{SA} = -33,3$ cm ☐ d. $\overline{SA} = -1$ m
- 16** La Lune est vue depuis la Terre sous un angle $2\alpha = 0,5^\circ$.
Distance Terre-Lune : $3,8 \cdot 10^8$ m
 Le miroir sphérique concave de rayon $R = |\overline{SC}|$ d'un télescope dont l'axe optique est dirigé vers le centre de la Lune en donne une image :
- ☐ a. dans le plan central.
☐ b. dans le plan focal.
☐ c. de diamètre $R\alpha$ (α étant exprimé en radians).
☐ d. de diamètre $2R\alpha$ (α étant exprimé en radians).

Voir corrigés page 10

2

Lentilles minces

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

- Les formules de conjugaison des lentilles minces.
- Les constructions objet-image et rayon incident-rayon émergent pour les lentilles minces.
- Les systèmes formés de deux lentilles minces, accolées ou non.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication.

1 Résultats généraux pour les lentilles minces sphériques

☐ V ☐ F a. Les points F et F' sont conjugués.

☐ V ☐ F b. La formule de conjugaison avec origine aux foyers est $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = f'^2$.

☐ V ☐ F c. La formule de conjugaison avec origine au centre optique est $\frac{1}{\overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$.

☐ V ☐ F d. Le grandissement transversal est donné par : $\gamma = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$.

2 Soit une lentille mince convergente.

☐ V ☐ F a. Un faisceau incident parallèle à l'axe converge derrière la lentille.

☐ V ☐ F b. Elle donne forcément d'un objet réel une image réelle.

☐ V ☐ F c. Si l'objet est situé entre le foyer objet et le centre optique, l'image est agrandie.

☐ V ☐ F d. Un objet virtuel donne forcément une image réelle.

3 Soit une lentille mince divergente.

☐ V ☐ F a. Un faisceau incident parallèle à l'axe converge derrière la lentille.

☐ V ☐ F b. Elle donne forcément d'un objet réel une image réelle.

☐ V ☐ F c. Si l'objet est situé entre le foyer objet et le centre optique, l'image est réelle.

☐ V ☐ F d. Un objet situé sur le foyer image donne une image à l'infini.

4 On accole deux lentilles minces de distances focales images f'_1 et f'_2 .

☐ V ☐ F a. L'ensemble peut être remplacé par une lentille unique.

☐ V ☐ F b. Les distances focales s'ajoutent.

Consignes

QCM

Il peut y avoir, pour certaines questions, deux propositions exactes.

On supposera que les lentilles sont utilisées dans les conditions de Gauss.

5 Soit une lentille mince convergente. Soit un objet réel AB , tel que A est situé sur l'axe en avant du foyer ; déterminer par le calcul si l'image est :

☐ a. réelle, droite ☐ b. réelle, renversée

☐ c. virtuelle, renversée ☐ d. virtuelle, droite

6 Soit une lentille mince convergente de vergence $V = 5 \delta$. Déterminer par construction si l'image $A'B'$, correspondant à un objet AB transverse tel que $\overline{OA} = 10 \text{ cm}$, est :

☐ a. réelle, droite ☐ b. réelle, renversée

☐ c. virtuelle, renversée ☐ d. virtuelle, droite

7 Soit un objet réel transverse AB ; déterminer grâce aux relations avec origine au centre si une lentille mince divergente donne une image :

☐ a. droite, plus grande que l'objet. ☐ b. droite, plus petite que l'objet.

☐ c. renversée, plus petite que l'objet. ☐ d. renversée, plus grande que l'objet.

- 8** Soit une lentille mince divergente de vergence $V = -10 \delta$. Déterminer par construction l'image $A'B'$ correspondant à un objet AB transverse, tel que $\overline{OA} = 5 \text{ cm}$.

☐ a. $\overline{OA'} = 3,3 \text{ cm}$ ☐ b. $\overline{OA'} = 10 \text{ cm}$

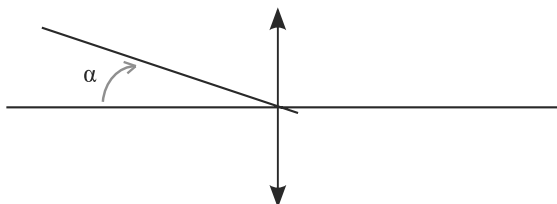
☐ c. $\gamma = 2$ ☐ d. $\gamma = \frac{2}{3}$

- 9** Une lentille mince donne d'un objet AB situé dans le plan focal image (avec A sur l'axe) une image réelle.

☐ a. La lentille est convergente. ☐ b. La lentille est divergente.

☐ c. $\overline{OA'} = \frac{f'}{2}$ ☐ d. $\overline{OA'} = -\frac{f'}{2}$

- 10** Un objet transverse lointain hors d'axe est vu sous l'angle $\alpha = 2^\circ$ au-dessus de l'axe optique d'une lentille convergente de vergence $V = 10 \delta$.



☐ a. L'image se situe 10 cm derrière la lentille.

☐ b. L'image est droite.

☐ c. La taille de l'image est de 3,5 mm.

☐ d. La taille de l'image est de 2 mm.

- 11** Où faut-il placer un objet AB pour qu'une lentille convergente de distance focale image f' en donne une image droite trois fois plus grande que l'objet ?

☐ a. $\overline{OA} = -\frac{f'}{3}$ ☐ b. $\overline{OA} = \frac{f'}{3}$

☐ c. $\overline{OA} = -\frac{2f'}{3}$ ☐ d. $\overline{OA} = \frac{2f'}{3}$

- 12** Soient deux lentilles convergentes identiques L_1 et L_2 , de centres O_1 et O_2 , de distance focale image f' , distantes de $\overline{O_1O_2} = 3f'$. On note F'_{eq} le foyer image du système global.

☐ a. $\overline{O_2F'_{eq}} = \frac{f'}{2}$ ☐ b. $\overline{O_2F'_{eq}} = f'$

☐ c. $\overline{O_2F'_{eq}} = \frac{3f'}{2}$ ☐ d. $\overline{O_2F'_{eq}} = 2f'$

13 Soient deux lentilles convergentes L_1 et L_2 , de centres O_1 et O_2 , de distances focales image f' et $4f'$, distantes de $\overline{O_1O_2} = 5f'$.

- ☐ a. La distance focale image de l'ensemble est $\frac{4f'}{5}$.
- ☐ b. L'ensemble est afocal.
- ☐ c. Un faisceau cylindrique d'axe O_1O_2 a son diamètre multiplié par 4 après traversée des deux lentilles.
- ☐ d. Un faisceau cylindrique d'axe O_1O_2 a son diamètre divisé par 4 après traversée des deux lentilles.

14 Soient deux lentilles, la première convergente, de centre O_1 et de distance focale image f' , la deuxième divergente, de centre O_2 et de distance focale $-3f'$; les deux lentilles sont accolées. L'ensemble donne d'un objet AB une image à l'infini.

- ☐ a. L'objet est réel. ☐ b. L'objet est virtuel.
- ☐ c. $\overline{O_1A} = -\frac{3f'}{2}$ ☐ d. $\overline{O_1A} = 2f'$

15 Soient deux lentilles, la première convergente, de centre O_1 et de distance focale image f' , la deuxième divergente, de centre O_2 et de distance focale image $-\frac{f'}{2}$, distantes de $\overline{O_1O_2} = \frac{f'}{2}$. L'ensemble donne d'un objet AB une image à l'infini.

- ☐ a. $\overline{O_1A} = -f'$ ☐ b. L'objet est à l'infini.
- ☐ c. L'image est droite. ☐ d. L'image est renversée.

16 On place derrière une lentille convergente un miroir plan; un objet est placé dans le plan focal de la lentille. L'ensemble donne une image :

- ☐ a. dans le plan focal image. ☐ b. dans le plan focal objet.
- ☐ c. L'image est renversée. ☐ d. L'image est droite.

Voir corrigés page 17

1 Lois de Snell-Descartes, dioptries et miroirs

VRAI/FAUX

1 Une source lumineuse ponctuelle est placée en un point A sur l'axe de symétrie d'un système optique centré ; on constate l'existence d'un point de convergence A' des rayons lumineux après traversée du système optique.

☒ V ☐ F a. Le système optique est stigmatique pour le couple (A, A') .

En effet tout rayon passant par A passe aussi par A' , ce qui est la définition du stigmatisme pour le couple (A, A') .

☒ V ☐ F b. A' est l'image de A par le système optique.

C'est la conséquence directe de la proposition précédente.

☐ V ☒ F c. Le système optique est aplanétique pour le couple (A, A') .

Aucune information n'est donnée concernant l'image d'un point B tel que l'objet AB soit transverse : on ne peut donc pas savoir si son image est transverse elle aussi, ce qui correspondrait à la propriété d'aplanétisme.

☒ V ☐ F d. Si on place la source lumineuse en A' les rayons convergeront en A .

Il s'agit de la loi du retour inverse de la lumière.

2 Un rayon lumineux passe de l'air (milieu homogène d'indice $n_0 = 1$) à l'eau (milieu homogène d'indice $n_1 = 1,33$) ; l'angle d'incidence α_0 est non nul.

☒ V ☐ F a. La lumière se propage en ligne droite dans chaque milieu.

Comme les milieux sont homogènes et isotropes, la propagation de la lumière y est rectiligne.

☐ V ☒ F b. Le rayon réfracté s'écarte de la normale à l'interface air-eau.

D'après la loi de Descartes pour la réfraction, avec les notations utilisées : $n_0 \sin i_0 = n_1 \sin i_1$; comme $n_1 > n_0$, $i_1 < i_0$: le rayon se rapproche de la normale.

☐ V ☒ F c. Pour certaines incidences il peut y avoir réflexion totale de la lumière.

Le premier milieu est moins réfringent que le second, il ne peut pas y avoir réflexion totale puisque $i_1 < i_0 < \frac{\pi}{2}$.

3 Soit un dioptre plan de sommet O séparant deux milieux d'indices n_1 et n_2 .

☐ V ☒ F a. Le système est rigoureusement stigmatique pour tout point de l'espace.

Pour différents angles d'incidence sur le dioptre, les rayons émergents se croisent en des points distincts : on ne peut donc pas parler de stigmatisme rigoureux ; le système est en revanche approximativement stigmatique, si on considère des rayons de faible incidence

sur le dioptré. Les différents points d'intersection des rayons émergents sont alors très proches.

☐ V ☒ F **b.** Le système est rigoureusement aplanétique pour tout point de l'espace.

De la même façon, le dioptré plan est approximativement aplanétique pour des rayons de faible incidence sur le dioptré.

☐ V ☒ F **c.** Dans les conditions de Gauss la formule de conjugaison est : $n_1 \overline{OA} = n_2 \overline{OA'}$.

La formule de conjugaison du dioptré plan est $\frac{\overline{OA}}{n_1} = \frac{\overline{OA'}}{n_2}$; en cas de doute, on peut s'aider d'un schéma dans un cas particulier : si $n_1 < n_2$, le rayon se rapprochant de la normale, l'image (virtuelle) se trouve forcément plus loin du dioptré que l'objet et ce n'est pas le cas avec la formule $n_1 \overline{OA} = n_2 \overline{OA'}$.

☒ V ☐ F **d.** Le grandissement transversal est égal à 1.

On le trouve de façon évidente par translation de l'objet parallèlement au dioptré.

☒ V ☐ F **e.** Le système est afocal.

D'après la formule de conjugaison, si $OA \rightarrow \infty$, $OA' = \frac{n_2}{n_1} OA \rightarrow \infty$ donc le foyer image est rejeté à l'infini ; par un raisonnement analogue il en est de même pour le foyer objet.

4 Soit un miroir sphérique de centre C et de sommet S .

☒ V ☐ F **a.** Dans certaines conditions, le système est stigmatique et aplanétique.

Il faut se placer dans les conditions de Gauss (rayons paraxiaux, point d'incidence sur le miroir au voisinage du sommet, angle d'incidence faible ; deux de ces trois conditions entraînent automatiquement la troisième).

☒ V ☐ F **b.** A et A' étant deux points conjugués sur l'axe, leurs positions sont liées par : $\frac{1}{\overline{CA'}} + \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS}}$

☐ V ☒ F **c.** A et A' étant deux points conjugués sur l'axe, leurs positions sont liées par : $\frac{1}{\overline{SA'}} - \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}}$

Retenir que les formules de conjugaison au centre et au sommet sont similaires, en remplaçant C par S ; la formule avec origine au sommet proposée présente une erreur de signe. Les deux formules précédentes découlent de la formule de Newton $\overline{FA} \cdot \overline{FA'} = \overline{FS}^2$.

Attention cependant aux formules pour le grandissement transversal : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$; pour ne pas se tromper on peut s'aider d'une construction avec l'objet AB et l'image

$A'B'$ en traçant les rayons passant par le centre et le sommet, et appliquer les relations géométriques dans les triangles CAB et $CA'B'$, puis SAB et $SA'B'$.

☐ V ☒ F d. Les foyers sont symétriques par rapport au sommet du miroir.

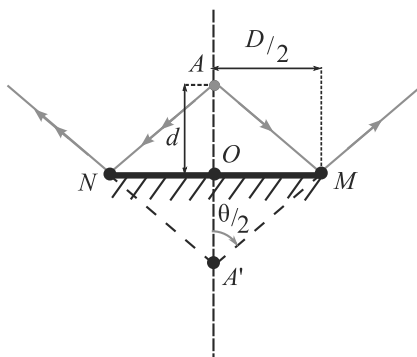
Les foyers sont confondus pour un miroir sphérique, et situés à mi-chemin entre le centre et le sommet.

QCM

5 Une source lumineuse ponctuelle est située sur l'axe d'un disque réfléchissant de diamètre D , à une distance d du disque ; quelle est la relation vérifiée par l'ouverture angulaire θ du cône lumineux réfléchi ?

☐ a. $\tan(\theta) = \frac{D}{d}$ ☒ b. $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{D}{2d}$

☐ c. $\sin(\theta) = \frac{D}{d}$ ☐ d. $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{D}{2d}$

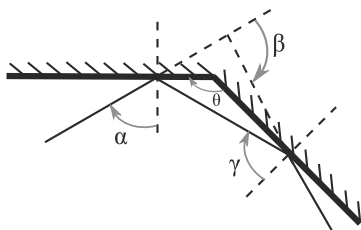


Construire les rayons réfléchis au niveau des bords du miroir et utiliser le triangle rectangle $OA'M$ où A' est le symétrique de A par rapport à O et M le point au bord du disque.

6 Deux miroirs plans font entre eux un angle de $\theta = \frac{3\pi}{4}$; un faisceau parallèle frappe le premier miroir sous une incidence $\alpha = \frac{\pi}{3}$; de quel angle β a tourné la lumière après les deux réflexions ?

☐ a. $\beta = \frac{\pi}{4}$ ☐ b. $\beta = \frac{\pi}{3}$ ☒ c. $\beta = \frac{\pi}{2}$ ☐ d. $\beta = \frac{4\pi}{3}$

La réflexion est symétrique par rapport à la normale ; faire un schéma et reporter les différents angles (comptés positivement dans le sens horaire).



Si α est l'angle d'incidence, lors de la 1^{re} réflexion le rayon lumineux tourne de $\pi - 2\alpha$; dans le triangle formé par les deux points d'incidence et le point d'intersection des segments représentant les miroirs la somme des angles vaut π ; on en déduit que l'angle d'incidence γ sur le deuxième miroir est tel que : $\frac{\pi}{2} - \gamma = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \theta$ soit $\gamma = \theta - \alpha$

Le rayon tourne de $\pi - 2\gamma = \pi - 2\theta + 2\alpha$ lors de la 2^e réflexion.

On somme les deux déviations qui ont lieu dans le même sens : $\beta = 2(\pi - \theta)$

7 Un rayon lumineux passe de l'eau à l'air ; son angle d'incidence est égal à 45° . L'indice de l'eau vaut $n_1 = 1,33$ et celui de l'air $n_0 = 1$.

- ☐ a. Le rayon n'est pas dévié.
- ☐ b. Il y a réflexion totale.
- ☐ c. L'angle d'émergence vaut $32,1^\circ$.
- ☒ d. L'angle d'émergence vaut $70,1^\circ$.

Il y a changement de milieu, en incidence oblique, donc le rayon lumineux est dévié. D'après la loi de Descartes pour la réfraction : $n_1 \sin(i_1) = n_0 \sin(i_0)$ donc $i_0 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_0} \sin i_1\right) = 70,1^\circ$.

Le passage se fait d'un milieu réfringent à un milieu moins réfringent, il pourrait y avoir réflexion totale pour un angle d'incidence trop grand, mais au vu de l'application numérique ce n'est pas le cas ici.

8 Soit un dioptré plan séparant deux milieux successifs d'indices respectifs n_1 (1^{er} milieu) et n_2 (2^e milieu) ; $n_1 > n_2$. Soit une source lumineuse placée en A dans le milieu d'indice n_1 à une distance d du dioptré.

- ☐ a. On peut observer une image A' sur un écran situé après le dioptré.
- ☐ b. L'image A' est située après le dioptré, à une distance $d' = \frac{n_1}{n_2}d$.
- ☐ c. On peut observer une image A' sur un écran situé entre A et le dioptré.
- ☒ d. L'image A' est située avant le dioptré, à une distance $d' = \frac{n_2}{n_1}d$.

D'après la formule de conjugaison du dioptré plan $\overline{OA'} = \frac{n_2 \overline{OA}}{n_1}$ avec ici $|\overline{OA}| = d$ et $|\overline{OA'}| = d'$. L'image, située avant le dioptré, est virtuelle : on peut l'observer à l'œil à travers le dioptré mais on ne peut pas la recueillir sur un écran.

9 Soit un miroir sphérique concave.

- ☒ **a.** Ses foyers objet et image sont réels.
- ☐ **b.** Son foyer objet est réel et son foyer image est virtuel.
- ☐ **c.** Ses foyers objet et image sont virtuels.
- ☐ **d.** Son foyer objet est virtuel et son foyer image est réel.

Les foyers sont confondus pour un miroir sphérique, et situés à mi-chemin entre le centre et le sommet ; dans le cas d'un miroir concave le centre est avant le sommet donc le foyer est réel.

10 Soit une source lumineuse quasi ponctuelle située en A à 30 cm d'un miroir ; le point de convergence des rayons réfléchis par le miroir est observé sur un écran légèrement décalé par rapport à la source, situé à 30 cm du miroir.

- ☐ **a.** Le miroir peut être plan.
- ☒ **b.** Le miroir peut être sphérique concave.
- ☐ **c.** Le miroir peut être sphérique convexe.
- ☐ **d.** L'expérience décrite n'est pas réalisable.

Un miroir plan donne d'un objet réel une image virtuelle, dans le cas présent à 30 cm derrière le miroir donc la proposition **a.** est impossible ; un miroir sphérique a pour points invariants son centre et son sommet : pour les propositions **b.** et **c.**, A pourrait être le centre si le miroir a pour rayon de courbure 30 cm, mais l'objet étant réel il s'agirait forcément d'un miroir concave.

11 Un miroir sphérique concave de sommet S et de centre C a pour rayon $R = |\overline{SC}| = 1$ m.

Un observateur situé à 75 cm du miroir se regarde dans le miroir.

- ☐ **a.** L'image est réelle et droite.
- ☒ **b.** L'image est réelle et renversée.
- ☐ **c.** L'image est virtuelle et droite.
- ☒ **d.** L'observateur ne peut pas voir l'image.

L'observateur constitue un objet réel, tel que $\overline{SA} = \frac{3}{4} \overline{SC} < 0$; en appliquant les formules de conjugaison avec origine au sommet $\frac{1}{\overline{SA'}} = -\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{2}{\overline{SC}} = \frac{2}{3\overline{SC}} < 0$; l'image est donc

réelle (elle est située avant le sommet) et $\overline{SA'} = 1,5 \text{ m}$: elle est derrière l'observateur, qui ne peut pas la voir dans le miroir. Comme $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = -2 < 0$, l'image est renversée.



Toutes les valeurs utilisées dans les formules sont algébriques : il faut veiller à utiliser le bon signe quand on part de données en valeur absolue. Pour un miroir, un objet et une image réels correspondent à $\overline{SA}$ et $\overline{SA'}$ négatifs, un objet et une image virtuels correspondent à $\overline{SA}$ et $\overline{SA'}$ positifs.

- 12** Un miroir sphérique convexe de sommet S et de centre C a pour rayon $R = |\overline{SC}| = 1 \text{ m}$.

Un observateur situé à 50 cm du miroir se regarde dans le miroir.

- ☒ a. L'image est virtuelle et droite.
- ☐ b. L'image est à l'infini.
- ☐ c. L'image est réelle et renversée.
- ☐ d. L'observateur ne peut pas voir l'image.

L'observateur constitue un objet réel, tel que $\overline{SA} = -\frac{1}{2}\overline{SC} < 0$; en appliquant à nouveau les formules de conjugaison avec origine au sommet $\frac{1}{\overline{SA'}} = -\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{2}{\overline{SC}} = \frac{4}{\overline{SC}} > 0$; l'image est donc virtuelle (elle est située après le sommet) et $\overline{SA'} = 0,25 \text{ m}$; comme $\gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = 0,5 > 0$, l'image est droite.

La remarque sur le signe des différentes distances algébriques est toujours d'actualité.

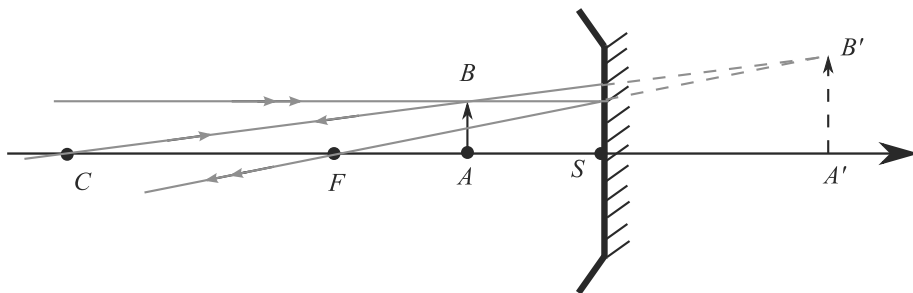
- 13** Un miroir sphérique donne d'un objet réel situé à $d = 1,5 \text{ m}$ du sommet une image virtuelle droite deux fois plus petite que l'objet. Déterminer la nature et le rayon $R = |\overline{SC}|$ de ce miroir.

- ☐ a. Le miroir est concave ; $R = 1 \text{ m}$.
- ☐ b. Le miroir est convexe ; $R = 1 \text{ m}$.
- ☐ c. Le miroir est concave ; $R = 3 \text{ m}$.
- ☒ d. Le miroir est convexe ; $R = 3 \text{ m}$.

$\overline{SA} = -d$ et $\gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = 0,5 > 0$ donc $\overline{SA'} = \frac{d}{2}$; par conséquent $\frac{2}{\overline{SC}} = \frac{-1}{d} + \frac{2}{d} = \frac{1}{d}$ donc $\overline{SC} = 2d = 3 \text{ m}$; le miroir est convexe puisque C est après S .

- 14** Soit un miroir sphérique concave tel que $\overline{FS} = 50 \text{ cm}$; un objet AB est situé à mi-distance entre le sommet et le foyer ; déterminer par construction la position de l'image $A'B'$ et le grandissement.

- ☐ a. $\overline{SA'} = 0,25 \text{ m}$
- ☒ b. $\overline{SA'} = 0,5 \text{ m}$
- ☐ c. $\gamma = -2$
- ☒ d. $\gamma = 2$



- 15** Soit un miroir sphérique convexe tel que $\overline{SF} = 50 \text{ cm}$; où est situé l'objet donnant une image réelle à $d = 1 \text{ m}$ du sommet ?

- ☒ a. $\overline{SA} = 33,3 \text{ cm}$
☐ b. $\overline{SA} = 1 \text{ m}$
☐ c. $\overline{SA} = -33,3 \text{ cm}$
☐ d. $\overline{SA} = -1 \text{ m}$

$\overline{SA'} = -d < 0$ puisque l'image est réelle ; $\frac{1}{\overline{SA}} = -\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SF}} = \frac{1}{d} + \frac{1}{\overline{SF}}$ donc $\overline{SA} = \frac{d \cdot \overline{SF}}{d + \overline{SF}}$; l'objet est virtuel, situé entre le sommet et le foyer, ce qu'on peut retrouver par construction.

- 16** La Lune est vue depuis la Terre sous un angle $2\alpha = 0,5^\circ$.

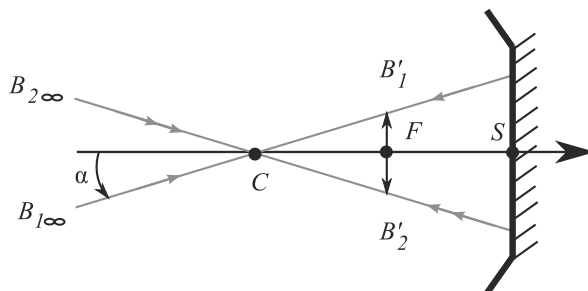
Distance Terre-Lune : $3,8 \cdot 10^8 \text{ m}$

Le miroir sphérique concave de rayon $R = |\overline{SC}|$ d'un télescope dont l'axe optique est dirigé vers le centre de la Lune en donne une image :

- ☐ a. dans le plan central.
☒ b. dans le plan focal.
☒ c. de diamètre $R\alpha$ (α étant exprimé en radians).
☐ d. de diamètre $2R\alpha$ (α étant exprimé en radians).

La Lune peut être considérée comme un objet à l'infini, le rayon du miroir étant forcément très inférieur à la distance Terre-Lune.

Par conséquent l'image est dans le plan focal ; pour déterminer sa taille il est utile de construire les rayons extrêmes correspondant aux bords du disque lunaire et passant par le centre du miroir.



On obtient alors, dans les conditions de Gauss, $\alpha_{(rad)} \approx \tan \alpha = \frac{\overline{FB'}}{\overline{FS}} = \frac{D}{2\left(\frac{R}{2}\right)}$ où D est le diamètre de l'image.

2 Lentilles minces

VRAI/FAUX

1 Résultats généraux pour les lentilles minces sphériques

☐ V ☒ F a. Les points F et F' sont conjugués.

F est l'antécédent d'un point à l'infini sur l'axe, F' est l'image d'un point à l'infini sur l'axe ; ils ne peuvent être conjugués que pour un système afocal, ce qui n'est pas le cas pour une lentille mince sphérique.

☐ V ☒ F b. La formule de conjugaison avec origine aux foyers est $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = f'^2$.

La formule présente une erreur de signe (attention à la confusion avec celle d'un miroir sphérique).

La formule de Newton d'une lentille mince est $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = \overline{FO} \cdot \overline{F'O} = -f'^2$; retenir plutôt la formule $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = f f'$ valable aussi bien pour les miroirs que pour les lentilles.

☐ V ☒ F c. La formule de conjugaison avec origine au centre optique est $\frac{1}{\overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$.

Nouvelle erreur de signe : il faut écrire $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$; on peut vérifier qu'alors, si A est envoyé à l'infini, $A' = F'$ ce qui correspond bien à la définition du foyer image ; de même si A' est envoyé à l'infini, $A = F$ (définition du foyer objet) ; il faut penser à faire ces vérifications simples en cas de doute sur une formule.

☒ V ☐ F d. Le grandissement transversal est donné par : $\gamma = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$.

Pour la retrouver on peut s'aider d'une construction avec l'objet AB et l'image $A'B'$ en traçant les rayons passant par le centre et les foyers ; en appliquant les relations géométriques dans les triangles semblables on trouve deux expressions du grandissement transversal. En les combinant on arrive à la relation avec origine aux foyers.

2 Soit une lentille mince convergente

☒ V ☐ F a. Un faisceau incident parallèle à l'axe converge derrière la lentille.

Il s'agit d'un objet à l'infini sur l'axe ; l'image est le foyer F' . La vergence de la lentille est définie par : $\frac{1}{OF'} = V > 0$ pour une lentille convergente. Le foyer F' est réel.

☐ V ☒ F b. Elle donne forcément d'un objet réel une image réelle.

D'après la relation avec origine au centre, $\frac{1}{OA'} = \frac{1}{OF'} + \frac{1}{OA}$, somme d'un terme positif et d'un terme négatif ; si $|\overline{OF'}| > |\overline{OA}|$ la somme est négative, ce qui correspond à $\overline{OA'} < 0$ et donc à une image virtuelle puisqu'elle est avant la lentille ; l'objet est alors entre le centre et le foyer.

☒ V ☐ F c. Si l'objet est situé entre le foyer objet et le centre optique l'image est agrandie.

C'est la situation évoquée à la question précédente ; le grandissement est donné par $\gamma = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}$; grâce à l'étude précédente $1 < \gamma$: l'image est plus grande que l'objet et dans le même sens ; la lentille convergente est alors utilisée en loupe (faire la construction pour le vérifier).

☒ V ☐ F d. Un objet virtuel donne forcément une image réelle.

D'après la relation avec origine au centre, $\frac{1}{OA'} = \frac{1}{OF'} + \frac{1}{OA}$, somme de deux termes positifs : alors $\overline{OA'} > 0$: l'image est réelle puisqu'elle se situe après la lentille (faire la construction pour le vérifier).

3 Soit une lentille mince divergente.

☐ V ☒ F a. Un faisceau incident parallèle à l'axe converge derrière la lentille.

Le faisceau diverge à partir du foyer image, virtuel pour une lentille divergente

☐ V ☒ F b. Elle donne forcément d'un objet réel une image réelle.

D'après la relation avec origine au centre, $\frac{1}{OA'} = \frac{1}{OF'} + \frac{1}{OA}$, somme de deux termes négatifs puisque F' et A sont avant O : alors $\overline{OA'} < 0$: l'image est virtuelle (faire la construction pour le vérifier).

☒ V ☐ F c. Si l'objet est situé entre le foyer objet et le centre optique l'image est réelle.

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'}} + \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OF}} \text{ avec } 0 < \overline{OA} < \overline{OF} \text{ donc } \frac{1}{\overline{OA}} > \frac{1}{\overline{OF}} \text{ et } \overline{OA'} > 0$$

☐ V ☒ F d. Un objet situé sur le foyer image donne une image à l'infini.

Il faudrait qu'il soit situé sur le foyer objet pour donner une image à l'infini et ce serait obligatoirement un objet virtuel.

4 On accole deux lentilles minces de distances focales images f'_1 et f'_2 .

☒ V ☐ F a. L'ensemble peut être remplacé par une lentille unique.

Soit la suite des points conjugués sur l'axe : $A \xrightarrow{L_1} A' \xrightarrow{L_2} A''$

et des points dans les plans transverses correspondants : $B \xrightarrow{L_1} B' \xrightarrow{L_2} B''$.

En combinant les relations de Descartes avec $O_1 = O_2 = O$ on obtient les relations :

$$\frac{1}{\overline{OA''}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'_1}} + \frac{1}{\overline{OF'_2}} = V_1 + V_2 \text{ et } \gamma = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA''}}{\overline{OA}} \text{ qui sont les relations pour une unique lentille mince. On constate que les vergences s'ajoutent.}$$

☐ V ☒ F b. Les distances focales s'ajoutent.

La distance focale équivalente, d'après la relation précédente, est donnée par

$$\frac{1}{f'_{eq}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} \text{ soit } f'_{eq} = \frac{f'_1 \cdot f'_2}{f'_1 + f'_2}$$

QCM

5 Soit une lentille mince convergente. Soit un objet réel AB , tel que A est situé sur l'axe en avant du foyer ; déterminer par le calcul si l'image est :

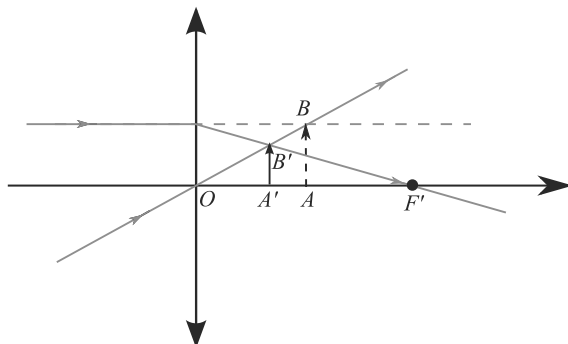
- ☐ a. réelle, droite ☒ b. réelle, renversée
☐ c. virtuelle, renversée ☐ d. virtuelle, droite

D'après la relation de Newton : $\overline{F'A'} = -\frac{f'^2}{\overline{FA}}$. Or $\overline{FA} < 0$ donc $\overline{F'A'} > 0$: l'image se situe après le foyer image de la lentille convergente, elle est forcément réelle et compte tenu du grandissement $\gamma = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} < 0$, elle est renversée, puisque $\overline{FA} < 0$ et $\overline{FO} > 0$.

6 Soit une lentille mince convergente de vergence $V = 5 \delta$. Déterminer par construction si l'image $A'B'$, correspondant à un objet AB transverse tel que $\overline{OA} = 10 \text{ cm}$, est :

- ☒ a. réelle, droite ☐ b. réelle, renversée
☐ c. virtuelle, renversée ☐ d. virtuelle, droite

La distance focale de cette lentille est $f' = 20$ cm ; A est un objet virtuel situé à mi-chemin entre le centre et le foyer image.



7 Soit un objet réel transverse AB ; déterminer grâce aux relations avec origine au centre si une lentille mince divergente donne une image :

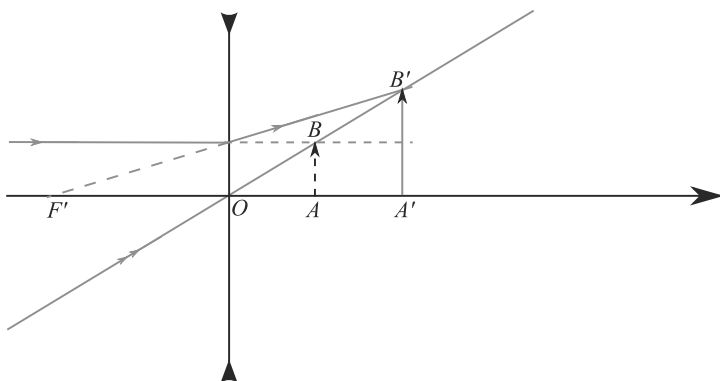
- ☐ a. droite, plus grande que l'objet. ☒ b. droite, plus petite que l'objet.
☐ c. renversée, plus petite que l'objet. ☐ d. renversée, plus grande que l'objet.

D'après la relation avec origine au centre, $\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'}} + \frac{1}{\overline{OA}}$; $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{1}{1 + \frac{\overline{OA}}{\overline{OF'}}$ avec $\overline{OA} < 0$ et $\overline{OF'} < 0$ donc $0 < \gamma < 1$. L'image est droite et plus petite que l'objet.

8 Soit une lentille mince divergente de vergence $V = -10$ δ. Déterminer par construction l'image $A'B'$, correspondant à un objet AB transverse tel que $\overline{OA} = 5$ cm.

- ☐ a. $\overline{OA'} = 3,3$ cm ☒ b. $\overline{OA'} = 10$ cm
☒ c. $\gamma = 2$ ☐ d. $\gamma = \frac{2}{3}$

La distance focale de cette lentille est $f' = -10$ cm ; A est un objet virtuel situé à mi-chemin entre le centre et le foyer objet.



On obtient une image dans le plan focal objet, ce qu'on peut vérifier par application des formules de conjugaison.

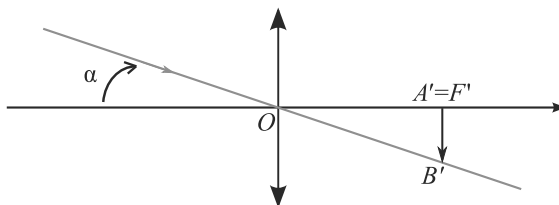
- 9** Une lentille mince donne d'un objet AB situé dans le plan focal image (avec A sur l'axe) une image réelle.

☒ a. La lentille est convergente. ☐ b. La lentille est divergente.

☒ c. $\overline{OA'} = \frac{f'}{2}$ ☐ d. $\overline{OA'} = -\frac{f'}{2}$

Puisque $A = F'$, $\frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OF'}}$ soit $\frac{2}{\overline{OF'}} = \frac{1}{\overline{OA'}}$ > 0 , l'image étant réelle. Il s'agit donc d'une lentille convergente, avec un objet virtuel. Alors $\overline{OA'} = \frac{\overline{OF'}}{2}$.

- 10** Un objet transverse lointain hors d'axe est vu sous l'angle $\alpha = 2^\circ$ au-dessus de l'axe optique d'une lentille convergente de vergence $V = 10 \delta$.



- ☒ a. L'image se situe 10 cm derrière la lentille. ☐ b. L'image est droite.
☒ c. La taille de l'image est de 3,5 mm. ☐ d. La taille de l'image est de 2 mm.

En considérant l'objet « à l'infini », l'image est dans le plan focal image ; compte tenu de la vergence, $\overline{OA'} = 10$ cm. Dans le triangle rectangle $OA'B'$, $|\tan \alpha| = \frac{A'B'}{f'}$ donc

$$A'B' = \frac{|\tan \alpha|}{V} = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

- 11** Où faut-il placer un objet AB pour qu'une lentille convergente de distance focale image f' en donne une image droite trois fois plus grande que l'objet ?

☐ a. $\overline{OA} = -\frac{f'}{3}$ ☐ b. $\overline{OA} = \frac{f'}{3}$

☒ c. $\overline{OA} = -\frac{2f'}{3}$ ☐ d. $\overline{OA} = \frac{2f'}{3}$

L'image étant droite, le grandissement est positif :

$$\gamma = 3 = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} \text{ donc } \overline{OA} = \overline{OF} + \overline{FA} = -\overline{FO} + \frac{\overline{FO}}{3} = \frac{-2f'}{3}.$$

- 12** Soient deux lentilles convergentes identiques L_1 et L_2 , de centres O_1 et O_2 , de distance focale image f' , distantes de $\overline{O_1O_2} = 3f'$. On note F'_{eq} le foyer image du système global.

- ☐ a. $\overline{O_2F'_{eq}} = \frac{f'}{2}$ ☐ b. $\overline{O_2F'_{eq}} = f'$
☐ c. $\overline{O_2F'_{eq}} = \frac{3f'}{2}$ ☒ d. $\overline{O_2F'_{eq}} = 2f'$

Le foyer image est par définition l'image d'un point à l'infini sur l'axe ; par la première lentille, l'image intermédiaire se situe au foyer F'_1 ; F'_{eq} est l'image par la 2^e lentille de $F'_1 : \infty \xrightarrow{L_1} F'_1 \xrightarrow{L_2} F'_{eq}$

Par la relation de Newton, $\overline{F'_2F'_{eq}} = \frac{-f'^2}{F_2F'_1} = \frac{-f'^2}{F_2O_2 + \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'_1}} = \frac{-f'^2}{f' - 3f' + f'} = f'$
 donc $\overline{O_2F'_{eq}} = \overline{O_2F'_2} + \overline{F'_2F'_{eq}} = 2f'$.

- 13** Soient deux lentilles convergentes L_1 et L_2 , de centres O_1 et O_2 , de distances focales image f' et $4f'$, distantes de $\overline{O_1O_2} = 5f'$.

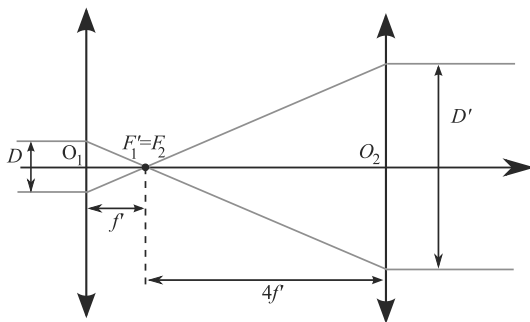
- ☐ a. La distance focale image de l'ensemble est $\frac{4f'}{5}$.
☒ b. L'ensemble est afocal.
☒ c. Un faisceau cylindrique d'axe O_1O_2 a son diamètre multiplié par 4 après traversée des deux lentilles.
☐ d. Un faisceau cylindrique d'axe O_1O_2 a son diamètre divisé par 4 après traversée des deux lentilles.



Les deux lentilles n'étant pas accolées on ne peut pas additionner leurs vergences.

Comme $\overline{O_1O_2} = 5f' = f' + 4f'$ les foyers F'_1 et F_2 sont confondus ; on obtient alors que les points conjugués sur l'axe sont : $\infty \xrightarrow{L_1} F'_1 = F_2 \xrightarrow{L_2} \infty$; l'ensemble est afocal.

Par construction :



Par relation dans les triangles, $\frac{D'}{D} = \frac{4f'}{f'} = 4$

- 14** Soient deux lentilles, la première convergente, de centre O_1 et de distance focale image f' , la deuxième divergente, de centre O_2 et de distance focale $-3f'$; les deux lentilles sont accolées. L'ensemble donne d'un objet AB une image à l'infini.

☒ a. L'objet est réel. ☐ b. L'objet est virtuel.

☒ c. $\overline{O_1A} = -\frac{3f'}{2}$ ☐ d. $\overline{O_1A} = 2f'$

La vergence de la lentille équivalente aux deux lentilles accolées est

$$V_{eq} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{3f'} = \frac{2}{3f'} > 0$$

Elle est donc convergente; l'image étant à l'infini, l'objet est au foyer objet, réel pour une lentille convergente et $\overline{O_1A} = \overline{O_1F_{eq}} = -\frac{3f'}{2}$.

- 15** Soient deux lentilles, la première convergente, de centre O_1 et de distance focale image f' , la deuxième divergente, de centre O_2 et de distance focale image $-\frac{f'}{2}$, distantes de $\overline{O_1O_2} = \frac{f'}{2}$. L'ensemble donne d'un objet AB une image à l'infini.

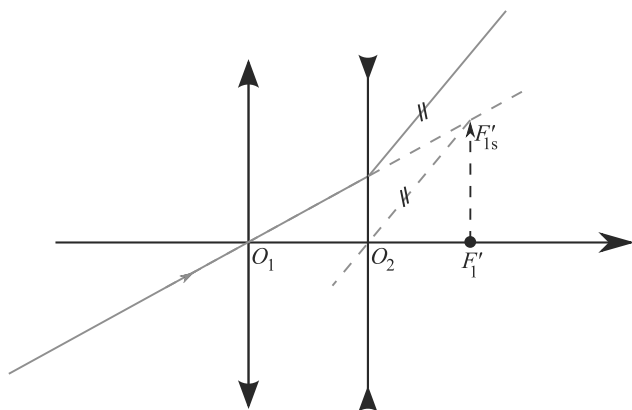
☐ a. $\overline{O_1A} = -f'$ ☒ b. L'objet est à l'infini.

☒ c. L'image est droite. ☐ d. L'image est renversée.

L'écartement des lentilles est tel que $\overline{O_1O_2} = f' - \frac{f'}{2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F'_2O_2}$ donc $F'_1 = F'_2$.

L'image étant à l'infini, son antécédent par les deux lentilles est aussi à l'infini (système afocal, comme à la question 9).

Pour déterminer le sens de l'image, on construit un rayon passant par le centre de la 1^{re} lentille :



Avant la 1^{re} lentille, la lumière provient du bas, après la 2^e lentille également, donc l'image est droite. Elle est agrandie. Ce type d'association est réalisé dans la lunette de Galilée, avec un plus grand rapport entre les distances focales des deux lentilles, pour augmenter le grossissement.

16 On place derrière une lentille convergente un miroir plan ; un objet est placé dans le plan focal de la lentille. L'ensemble donne une image :

- ☐ a. dans le plan focal image. ☒ b. dans le plan focal objet.
☒ c. L'image est renversée. ☐ d. L'image est droite.

L'image par la lentille se trouve à l'infini ; le miroir plan est afocal, l'image suivante est aussi à l'infini ; la réflexion sur le miroir plan inverse le sens de propagation, donc le foyer objet F devient foyer image et l'image se trouve dans son plan, c'est-à-dire dans le même plan que l'objet : cette propriété est utilisée dans la méthode d'autocollimation.

La réflexion sur le miroir plan étant symétrique par rapport à la normale, l'image est renversée par rapport à l'objet.

Partie 2

Électrocinétique et électronique

3

Lois de l'électrocinétique

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

- les lois de maille et de nœud ;
- les relations courant-tension pour les dipôles linéaires ;
- les associations de dipôles linéaires ;
- la puissance en électrocinétique.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication.

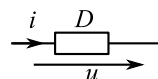
1 Circuits linéaires

☐ V ☐ F a. L'intensité du courant est la même en tout point d'un circuit série quelle que soit la fréquence.

☐ V ☐ F b. Un dipôle dont la relation tension-courant en convention récepteur est : $i(t) = Gu(t) + C \frac{du}{dt}$ où G et C sont deux constantes est un dipôle linéaire.

2 Aspect énergétique

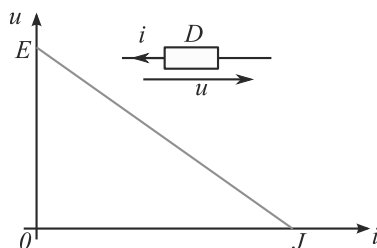
☐ V ☐ F a. Soit le dipôle symboliquement représenté par :



L'énergie qu'il reçoit entre deux instants t_1 et t_2 s'écrit :
$$W = \int_{t_1}^{t_2} u(t)i(t)dt$$

☐ V ☐ F b. Un dipôle qui consomme de l'énergie électrique, comme un résistor, doit être orienté en convention récepteur.

☐ V ☐ F c. Le dipôle D dont la caractéristique est donnée ci-dessous fonctionne en générateur :

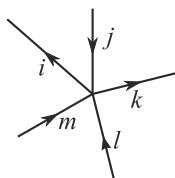


Consignes

QCM

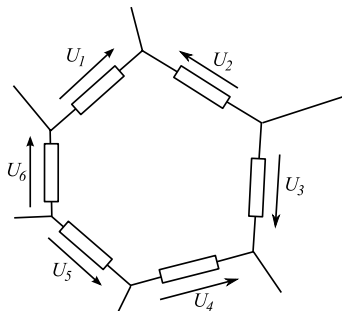
Il peut y avoir, pour certaines questions, deux propositions exactes.

- 3 Écrire la loi des nœuds sachant que les intensités i et j sont positives, et que les autres intensités sont négatives :



- ☐ a. $i + j - k - l - m = 0$ ☐ b. $-i + j + k - l - m = 0$
☐ c. $-i + j - k + l + m = 0$ ☐ d. $-i + j - k + l - m = 0$

- 4 Écrire la loi des mailles sachant que les tensions U_1 et U_4 sont positives et que les autres tensions sont négatives :



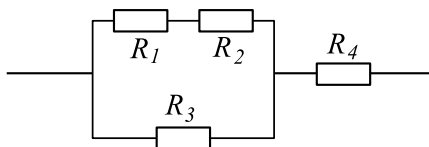
☐ a. $U_1 - U_2 - U_3 + U_4 - U_5 - U_6 = 0$

☐ b. $U_1 - U_2 + U_3 - U_4 - U_5 + U_6 = 0$

☐ c. $U_1 + U_2 - U_3 - U_4 + U_5 + U_6 = 0$

☐ d. $U_1 + U_2 + U_3 - U_4 + U_5 + U_6 = 0$

5 Déterminer la résistance équivalente à l'association :



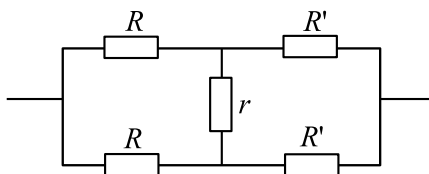
☐ a. $R_{eq} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_4$

☐ b. $R_{eq} = \frac{(R_1 + R_2) R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_4$

☐ c. $R_{eq} = \frac{(R_1 + R_2) (R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$

☐ d. $R_{eq} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + R_4$

6 Déterminer la résistance équivalente à l'association :



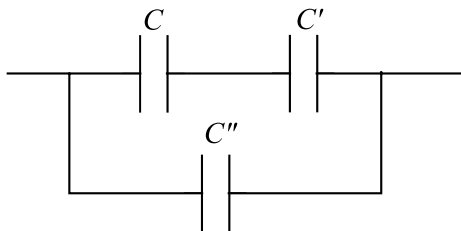
☐ a. $R_{eq} = \frac{R + R'}{2}$

☐ b. $R_{eq} = \frac{R(r + R)}{r + 2R} + \frac{R'(r + R')}{r + 2R'}$

☐ c. $R_{eq} = \frac{R(r + 2R)}{r + 4R} + \frac{R'(r + 2R')}{r + 4R'}$

☐ d. $R_{eq} = \frac{R(2r + R)}{2(r + R)} + \frac{R'(2r + R')}{2(r + R')}$

7 Déterminer la capacité équivalente à l'association :



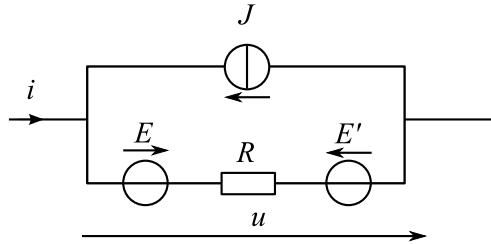
☐ a. $C_{eq} = \frac{CC' + C'C'' + CC''}{C + C' + C''}$

☐ b. $C_{eq} = \frac{CC'}{C''}$

☐ c. $C_{eq} = \frac{C''(C + C')}{C + C' + C''}$

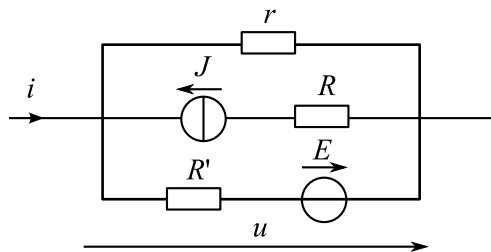
☐ d. $C_{eq} = \frac{CC'}{C + C'} + C''$

8 Écrire la relation $u = f(i)$:



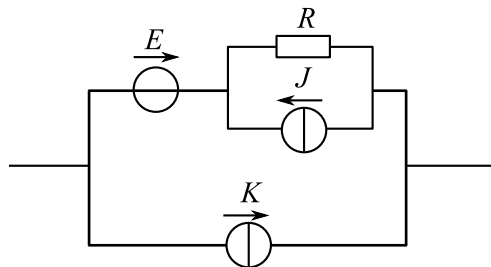
- ☐ a. $u = -E + E' - RJ - Ri$ ☐ b. $u = -E + E' + RJ + Ri$
☐ c. $u = E - E' - RJ - Ri$ ☐ d. $u = E - E' + RJ + Ri$

9 Écrire la relation $i = f(u)$:



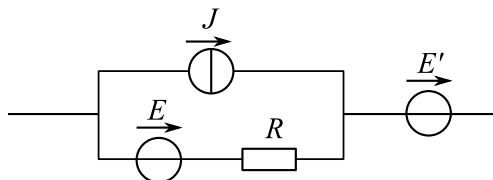
- ☐ a. $i = -J - \frac{E}{R'} + u \frac{r + R'}{rR'}$ ☐ b. $i = -J + \frac{E}{R'} - u \frac{r + R'}{rR'}$
☐ c. $i = J - \frac{E}{R'} + u \frac{r + R'}{rR'}$ ☐ d. $i = J - \frac{E}{R'} - u \frac{r + R'}{rR'}$

10 Déterminer le générateur de Thévenin équivalent en orientant la force électromotrice vers la droite :



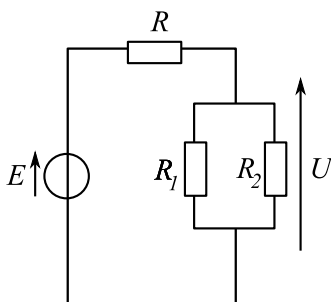
- ☐ a. $E_{eq} = E + R(K + J)$ ☐ b. $E_{eq} = E + R(K - J)$
☐ c. $R_{eq} = R$ ☐ d. $R_{eq} = \frac{R}{2}$

- 11** Déterminer le générateur de Norton équivalent en orientant le courant électromoteur vers la droite :



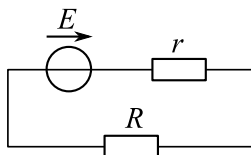
- ☐ a. $J_{eq} = J - \frac{E + E'}{R}$
☐ b. $J_{eq} = J + \frac{E + E'}{R}$
☐ c. $R_{eq} = R$
☐ d. $R_{eq} = 2R$

- 12** Déterminer la tension U :



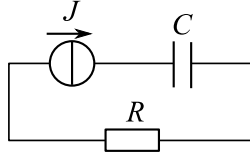
- ☐ a. $U = \frac{E(R_1 + R_2)}{R + R_1 + R_2}$
☐ b. $U = \frac{ER}{R + R_1 + R_2}$
☐ c. $U = \frac{ER_1R_2}{R(R_1 + R_2) + R_1R_2}$
☐ d. $U = \frac{ER_1R_2}{R(R_1 + R_2 + R)}$

- 13** Déterminer la puissance reçue par le résistor de résistance R .



- ☐ a. $P = \frac{E^2}{R}$
☐ b. $P = r \left(\frac{E}{r + R} \right)^2$
☐ c. $P = \frac{E^2}{R + r}$
☐ d. $P = R \left(\frac{E}{r + R} \right)^2$

- 14 Déterminer l'énergie W_R reçue par le résistor pendant une durée T et l'énergie W_C reçue par le condensateur initialement déchargé pendant la même durée.



- ☐ a. $W_R = RJ^2T$ ☐ b. $W_R = \frac{RJ^2T}{2}$
☐ c. $W_C = \frac{J^2T}{C}$ ☐ d. $W_C = \frac{J^2T}{2C}$

Voir corrigés page [59](#)

4

Circuits linéaires en régime permanent

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

- Les méthodes des mailles et des nœuds.
- Les transformations des circuits par associations et équivalences de générateurs.
- Le théorème de superposition.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication.

1 Méthodes des mailles et des nœuds.

- ☐ V ☐ F **a.** Si un circuit comporte 3 mailles indépendantes et deux nœuds, il vaut mieux appliquer une méthode des mailles.
- ☐ V ☐ F **b.** Quand on choisit une méthode des nœuds, les inconnues sont les intensités des courants.

2 Équivalences et associations de générateurs.

- ☐ V ☐ F **a.** Il est toujours possible de transformer les générateurs de tension en générateurs de courant, ou réciproquement.
- ☐ V ☐ F **b.** Les associations « parallèles » sont plus commodes à traiter en choisissant le modèle de Norton.

3 Théorème de superposition.

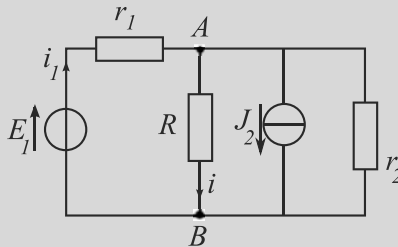
- ☐ V ☐ F **a.** Pour appliquer le théorème de superposition, on éteint un par un chacun des générateurs.
- ☐ V ☐ F **b.** Pour éteindre une source de tension, on la débranche.
- ☐ V ☐ F **c.** Pour éteindre une source de courant, on la débranche.

Consignes

QCM

Il peut y avoir, pour certaines questions, deux propositions exactes.

Le circuit d'étude pour les questions 4 à 12 est le suivant :



Le but est d'utiliser différentes méthodes pour déterminer le courant i circulant de A à B à travers la résistance R .

- 4** Méthode des mailles : les générateurs sont en représentation de Thévenin. Écrire deux lois des mailles faisant intervenir i et i_1 .

☐ a. $E_1 = r_1 i_1 + Ri$ ☐ b. $r_2 J_2 = r_2 i_1 + (R - r_2) i$

☐ c. $E_1 = r_1 i_1 - Ri$ ☐ d. $r_2 J_2 = r_2 i_1 - (R + r_2) i$

- 5** En déduire le courant circulant de A à B à travers la résistance R .

☐ a. $i = \frac{r_2 E_1 + r_1 r_2 J_2}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$ ☐ b. $i = \frac{r_1 r_2 J_2 - r_2 E_1}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$

☐ c. $i = \frac{r_2 E_1 - r_1 r_2 J_2}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$ ☐ d. $i = \frac{-r_2 E_1 - r_1 r_2 J_2}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$

- 6** Méthode des nœuds : les générateurs sont en représentation de Norton. Écrire la relation vérifiée par la tension U_{AB} (loi des nœuds en tension). Il sera pratique d'introduire les conductances : $G = \frac{1}{R}$, $g_1 = \frac{1}{r_1}$ et $g_2 = \frac{1}{r_2}$.

☐ a. $g_1 E_1 + J_2 = (G + g_1 + g_2) U_{AB}$ ☐ b. $g_1 E_1 - J_2 = (G + g_1 + g_2) U_{AB}$

☐ c. $J_2 - g_1 E_1 = (G + g_1 + g_2) U_{AB}$ ☐ d. $g_1 E_1 - J_2 = (G - g_1 - g_2) U_{AB}$

7 En déduire la tension U_{AB} puis le courant dans la résistance R .

☐ a. $U_{AB} = \frac{g_1 E_1 + J_2}{G + g_1 + g_2}$ ☐ b. $U_{AB} = \frac{g_1 E_1 - J_2}{G + g_1 + g_2}$

☐ c. $i = G \frac{g_1 E_1 + J_2}{G + g_1 + g_2}$ ☐ d. $i = G \frac{g_1 E_1 - J_2}{G + g_1 + g_2}$

8 Remplacer les deux générateurs par un générateur de Norton équivalent (orienter la source de courant de B vers A).

☐ a. $J_{eq} = \frac{E_1}{r_1} + J_2$ ☐ b. $r_{eq} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$

☐ c. $J_{eq} = \frac{E_1}{r_1} - J_2$ ☐ d. $r_{eq} = \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}$

9 Utiliser un diviseur de courant pour déterminer l'intensité dans la résistance R .

☐ a. $i = \frac{-r_2 E_1 + r_1 r_2 J_2}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$ ☐ b. $i = \frac{r_2 E_1 + r_1 r_2 J_2}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$

☐ c. $i = -\frac{r_2 E_1 + r_1 r_2 J_2}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$ ☐ d. $i = \frac{r_2 E_1 - r_1 r_2 J_2}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$

10 Éteindre le générateur de Thévenin et déterminer l'intensité i' circulant de A à B dans la résistance R .

☐ a. $i' = \frac{r_1 r_2 J_2}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$ ☐ b. $i' = \frac{R J_2}{r_1 + R + r_2}$

☐ c. $i' = \frac{-r_1 r_2 J_2}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$ ☐ d. $i' = \frac{-R J_2}{r_1 + R + r_2}$

11 Éteindre le générateur de Norton et déterminer l'intensité i'' dans la résistance R .

☐ a. $i'' = \frac{r_2 E_1}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$ ☐ b. $i'' = \frac{R E_1}{r_1 (r_1 + R + r_2)}$

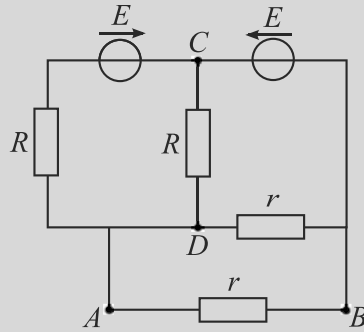
☐ c. $i'' = \frac{-r_2 E_1}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$ ☐ d. $i'' = \frac{-R E_1}{r_1 (r_1 + R + r_2)}$

12 En déduire le courant dans la résistance R en présence des deux générateurs.

☐ a. $i = \frac{r_2 E_1 + r_1 r_2 J_2}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$ ☐ b. $i = \frac{r_2 E_1 - r_1 r_2 J_2}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$

☐ c. $i = \frac{R(E_1 - r_1 j_2)}{r_1 (r_1 + R + r_2)}$ ☐ d. $i = \frac{R(E_1 + r_1 j_2)}{r_1 (r_1 + R + r_2)}$

Le circuit étudié pour les questions 13 à 15 est le suivant :



- 13** Calculer la tension U'_{AB} quand on garde le générateur de droite allumé, puis la tension U''_{AB} quand on garde le générateur de gauche allumé.

☐ a. $U'_{AB} = \frac{-Er}{r+R}$ ☐ b. $U'_{AB} = \frac{Er}{r+R}$
☐ c. $U''_{AB} = \frac{-rE}{2(R+r)}$ ☐ d. $U''_{AB} = \frac{rE}{2(R+r)}$

- 14** Calculer le courant circulant de A à B dans la résistance r .

☐ a. $i = \frac{-E}{2(r+R)}$ ☐ b. $i = \frac{E}{2(r+R)}$
☐ c. $i = \frac{-E}{r+R}$ ☐ d. $i = \frac{E}{r+R}$

- 15** Transformer le circuit initial en faisant apparaître deux générateurs de Norton et en déduire le courant k circulant de C à D.

☐ a. $k = \frac{E(2r+R)}{2r(R+r)}$ ☐ b. $k = \frac{E(2R+r)}{2r(R+r)}$
☐ c. $k = \frac{E(2R+r)}{2R(R+r)}$ ☐ d. $k = \frac{E(2r+R)}{2R(R+r)}$

Voir corrigés page 64

5

Circuits linéaires en régime transitoire

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

- Circuits d'ordre 1 en régime libre.
- Circuits d'ordre 1 avec un générateur de tension ou de courant constant.
- Circuits d'ordre 2 : forme canonique, différents régimes.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication.

1 Conditions initiales

☐ V ☐ F **a.** Pour déterminer les constantes d'intégration lors de la résolution de l'équation différentielle d'un circuit comportant un condensateur et une bobine, on utilise la continuité de l'intensité du courant dans le condensateur.

☐ V ☐ F **b.** Pour déterminer les constantes d'intégration lors de la résolution de l'équation différentielle d'un circuit comportant un condensateur et une bobine, on utilise la continuité de l'intensité du courant dans la bobine.

2 Circuits d'ordre 1 en régime libre

☐ V ☐ F **a.** Un circuit comportant en série une résistance R et un condensateur de capacité C a pour temps caractéristique $\tau = RC$.

☐ V ☐ F **b.** Un circuit comportant en série une résistance R et une bobine idéale d'inductance L a pour temps caractéristique $\tau = \frac{R}{L}$.

3 Circuits d'ordre 2 en régime libre

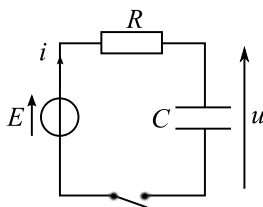
☐ V ☐ F a. Un circuit comporte en série une résistance R réglable, un condensateur de capacité C et une bobine idéale d'inductance L fixes. Une grande valeur de R permet d'observer des oscillations de la tension aux bornes du condensateur.

☐ V ☐ F b. Le régime permanent est atteint au bout d'un temps minimum si la résistance a pour valeur $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Consignes

QCM

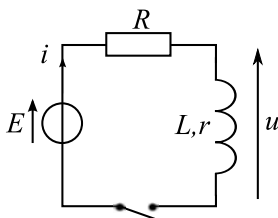
Il peut y avoir, pour certaines questions, deux propositions exactes.

4 Un circuit série comporte une source de tension E , une résistance R et un condensateur C ainsi qu'un interrupteur :

À l'instant $t = 0$ où on ferme l'interrupteur le condensateur est chargé (charge q_0). Le courant $i(t)$ circulant dans le circuit est alors :

☐ a. $i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right)$ ☐ b. $i(t) = \frac{q_0}{RC} \left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right)$

☐ c. $i(t) = \left(\frac{E}{R} - \frac{q_0}{RC}\right) e^{\frac{-t}{RC}}$ ☐ d. $i(t) = \left(\frac{E}{R} + \frac{q_0}{RC}\right) e^{\frac{-t}{RC}}$

5 Un circuit série comporte une source de tension E , une résistance R et une bobine assimilable à une résistance r en série avec une inductance pure L ainsi qu'un interrupteur.

À l'instant $t = 0$ on ferme l'interrupteur. Le courant $i(t)$ circulant dans le circuit est alors :

☐ a. $i(t) = \frac{E}{r+R} e^{\frac{-tR}{L}}$ ☐ b. $i(t) = \frac{E}{r+R} (1 - e^{\frac{-tR}{L}})$

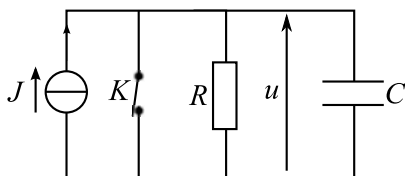
☐ c. $i(t) = \frac{E}{r+R} e^{\frac{-t(r+R)}{L}}$ ☐ d. $i(t) = \frac{E}{r+R} (1 - e^{\frac{-t(r+R)}{L}})$

- 6** Un circuit série comporte une source de tension E , une résistance R et une bobine assimilable à une résistance r en série avec une inductance pure L ainsi qu'un interrupteur. À l'instant $t = 0$ on ferme l'interrupteur. La tension aux bornes de la bobine $u(t)$ est alors :

☐ a. $u(t) = E e^{\frac{-t(r+R)}{L}}$ ☐ b. $u(t) = E e^{\frac{-tR}{L}}$

☐ c. $u(t) = \frac{E}{r+R} (r + R e^{\frac{-t(r+R)}{L}})$ ☐ d. $u(t) = \frac{RE}{r+R} e^{\frac{-tR}{L}}$

- 7** Un circuit parallèle comporte une source de courant J , une résistance R et un condensateur C ainsi qu'un interrupteur.

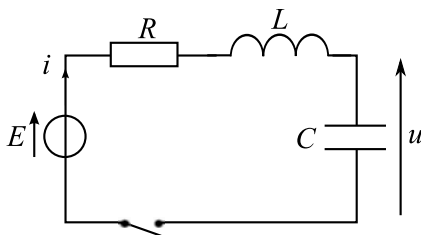


À l'instant $t = 0$ où on ouvre l'interrupteur K le condensateur est déchargé. La tension $u(t)$ aux bornes de la source de courant est :

☐ a. $u(t) = JR e^{\frac{-t}{RC}}$ ☐ b. $u(t) = JR (1 - e^{\frac{-t}{RC}})$

☐ c. $u(t) = -JR e^{\frac{-t}{RC}}$ ☐ d. $u(t) = JR (e^{\frac{-t}{RC}} - 1)$

- 8** Un circuit série comporte une source de tension E , une résistance R , un condensateur C et une bobine de résistance négligeable assimilable à une inductance pure L ainsi qu'un interrupteur.



À l'instant $t = 0$, le condensateur est déchargé, on ferme l'interrupteur. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur $u(t)$ et la mettre sous forme canonique ; en déduire l'expression de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q_0 .

☐ a. $\omega_0 = \frac{1}{LC}$ ☐ b. $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

☐ c. $Q_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ ☐ d. $Q_0 = R \sqrt{\frac{C}{L}}$

- 9** Dans cette question et les suivantes, le circuit est celui décrit à la question 8. Écrire l'équation caractéristique puis déterminer la valeur du facteur de qualité correspondant au changement de type de réponse du circuit.

☐ a. $Q_0 = 1$ ☐ b. $Q_0 = 2$ ☐ c. $Q_0 = \frac{1}{2}$ ☐ d. $Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

- 10** Soit $Q_0 = 0,25$. Calculer les racines de l'équation caractéristique et en déduire la forme de $u(t)$ (α et β sont des constantes).

☐ a. $u(t) = \alpha e^{\omega_0(2+\sqrt{3})t} + \beta e^{\omega_0(2-\sqrt{3})t}$
☐ b. $u(t) = E + \alpha e^{\omega_0(2+\sqrt{3})t} + \beta e^{\omega_0(2-\sqrt{3})t}$
☐ c. $u(t) = \alpha e^{-\omega_0(2+\sqrt{3})t} + \beta e^{-\omega_0(2-\sqrt{3})t}$
☐ d. $u(t) = E + \alpha e^{-\omega_0(2+\sqrt{3})t} + \beta e^{-\omega_0(2-\sqrt{3})t}$

- 11** Soit $Q_0 = 0,25$. En tenant compte des conditions initiales, déterminer α et β .

☐ a. $\alpha = E \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \right)$ ☐ b. $\alpha = E \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \right)$
☐ c. $\beta = -E \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \right)$ ☐ d. $\beta = E \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \right)$

- 12** Soit $Q_0 = 0,5$. Sous quelle forme faut-il chercher $u(t)$?

☐ a. $u(t) = \alpha + \beta t e^{-\omega_0 t}$ ☐ b. $u(t) = \alpha + \beta t e^{\omega_0 t}$
☐ c. $u(t) = E + (\alpha + \beta t) e^{-\omega_0 t}$ ☐ d. $u(t) = E + (\alpha + \beta t) e^{\omega_0 t}$

- 13** Soit $Q_0 = 0,5$. En tenant compte des conditions initiales, déterminer $u(t)$.

☐ a. $u(t) = E (e^{-\omega_0 t} - 1) - \omega_0 t E e^{-\omega_0 t}$ ☐ b. $u(t) = E (1 - e^{-\omega_0 t}) - \omega_0 t E e^{-\omega_0 t}$
☐ c. $u(t) = E (1 - \omega_0 t e^{-\omega_0 t})$ ☐ d. $u(t) = E (1 + \omega_0 t e^{-\omega_0 t})$

- 14** Soit $Q_0 = 1$. Calculer les racines de l'équation caractéristique et en déduire la forme de $u(t)$ (α et φ sont des constantes).

☐ a. $u(t) = \alpha e^{\frac{-\omega_0 t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\omega_0 t}{2} + \varphi\right)$

☐ b. $u(t) = \alpha e^{\frac{\omega_0 t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\omega_0 t}{2} + \varphi\right)$

☐ c. $u(t) = E + \alpha e^{\frac{-\omega_0 t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\omega_0 t}{2} + \varphi\right)$

☐ d. $u(t) = E + \alpha e^{\frac{\omega_0 t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\omega_0 t}{2} + \varphi\right)$

- 15** Soit $Q_0 = 1$. En tenant compte des conditions initiales, déterminer α et φ .

☐ a. $\varphi = \frac{\pi}{2}$

☐ b. $\varphi = \frac{5\pi}{6}$

☐ c. $\alpha = \frac{2E}{\sqrt{3}}$

☐ d. $\alpha = \frac{E}{\sqrt{2}}$

Voir corrigés page [70](#)

Circuits linéaires en régime sinusoïdal

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

- Impédance complexe.
- Lois et théorèmes.
- Résonances d'intensité et de tension.
- Puissance.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication.

1 Valeurs efficaces

☐ V ☐ F **a.** La valeur efficace complexe associée à la somme de deux tensions sinusoïdales de même pulsation est égale à la somme des valeurs efficaces complexes de chaque tension.

☐ V ☐ F **b.** La valeur efficace réelle associée à la somme de deux tensions sinusoïdales de même pulsation est égale à la somme des valeurs efficaces réelles de chaque tension.

2 Impédances

☐ V ☐ F **a.** L'impédance complexe d'un circuit (R, L, C) série est égale à $\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$

☐ V ☐ F **b.** L'impédance complexe d'un circuit (R, L, C) parallèle est égale à $\underline{Z} = \frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$

3 Circuits linéaires

☐ V ☐ F Les lois et théorèmes en régime sinusoïdal sont les mêmes qu'en régime permanent à condition de remplacer les résistances par les impédances complexes, et les intensités et tensions réelles par les intensités et tensions complexes.

4 ☐ V ☐ F Soit un dipôle soumis à une tension sinusoïdale $u(t) = U\sqrt{2}\cos\omega t$ et traversé par un courant d'intensité $i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi)$ (convention récepteur).

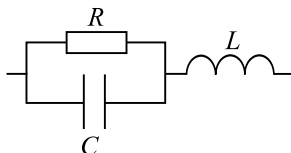
L'énergie reçue par ce dipôle au cours d'une période est $W = \frac{2\pi}{\omega} UI \cos\varphi$.

Consignes

QCM

Il peut y avoir, pour certaines questions, deux propositions exactes.

5 Soit le dipôle d'impédance complexe $\underline{Z}$ constitué d'une résistance R , d'un condensateur C , et d'une bobine d'inductance L , de résistance négligeable.



Déterminer l'expression de $\underline{Z}$.

☐ a. $\underline{Z} = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$ ☐ b. $\underline{Z} = \frac{jR(LC\omega^2 - 1)}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$

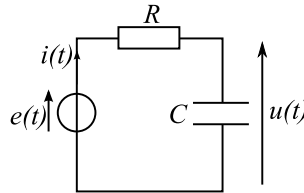
☐ c. $\underline{Z} = \frac{R(1 + jRC\omega)}{1 + (RC\omega)^2} + jL\omega$ ☐ d. $\underline{Z} = \frac{R}{1 + jRC\omega} + jL\omega$

6 Soit le dipôle de la question 5 constitué d'une résistance R , d'un condensateur C , et d'une bobine d'inductance L , de résistance négligeable. À quelle condition le déphasage est-il nul entre l'intensité qui le traverse et la tension à ses bornes ?

☐ a. $L = \frac{1}{C\omega^2}$ ☐ b. $L = \frac{R^2C}{1 + (RC\omega)^2}$

☐ c. $L = \frac{R}{\omega(1 + (RC\omega)^2)}$ ☐ d. $L = \frac{1 + (RC\omega)^2}{C\omega^2}$

- 7 Un circuit série comporte une source de tension sinusoïdale $e(t) = E \sqrt{2} \cos \omega t$, une résistance R et un condensateur C .



Déterminer la valeur efficace du courant $i(t) = I \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$ circulant dans le circuit.

- ☐ a. $I = \frac{EC\omega}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$ ☐ b. $I = \frac{E}{R} \sqrt{1 + (RC\omega)^2}$
☐ c. $I = \frac{EC\omega}{1 + (RC\omega)^2}$ ☐ d. $I = \frac{E}{R} (1 + (RC\omega)^2)$

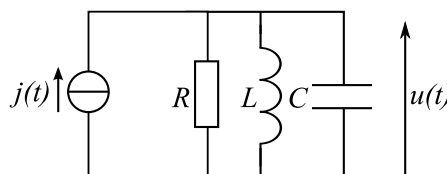
- 8 Un circuit série comporte une source de tension sinusoïdale $e(t) = E \sqrt{2} \cos \omega t$, une résistance R et un condensateur C . Soit φ le déphasage du courant $i(t) = I \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$ par rapport à la source de tension.

- ☐ a. $\tan \varphi = -RC\omega$ ☐ b. $\tan \varphi = \frac{1}{RC\omega}$
☐ c. $i(t)$ est en avance sur $e(t)$ ☐ d. $e(t)$ est en avance sur $i(t)$

- 9 Un circuit série comporte une source de tension sinusoïdale $e(t) = E \sqrt{2} \cos \omega t$, une résistance R et un condensateur C . Déterminer la puissance moyenne $\langle P \rangle$ fournie par la source de tension au reste du circuit.

- ☐ a. $\langle P \rangle = \frac{(E)^2}{C\omega R^2 (1 + (RC\omega)^2)}$ ☐ b. $\langle P \rangle = \frac{E^2}{R (1 + (RC\omega)^2)}$
☐ c. $\langle P \rangle = \frac{C\omega E^2}{1 + (RC\omega)^2}$ ☐ d. $\langle P \rangle = \frac{R (C\omega E)^2}{1 + (RC\omega)^2}$

- 10 Un circuit parallèle comporte une source de courant sinusoïdale $j(t) = J \sqrt{2} \cos \omega t$, une résistance R , un condensateur C , une bobine d'inductance L et de résistance négligeable.



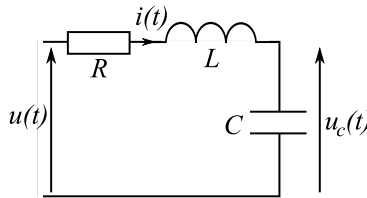
Déterminer la valeur efficace de la tension $u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ aux bornes du circuit.

$$\begin{aligned} \square \text{ a. } U &= J \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2} & \square \text{ b. } U &= J \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \\ \square \text{ c. } U &= \frac{J}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} & \square \text{ d. } U &= \frac{J}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}} \end{aligned}$$

- 11** On reprend le circuit de la question 10. Soit φ le déphasage de la tension $u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ par rapport à la source de courant, avec $LC\omega^2 > 1$.

$$\begin{aligned} \square \text{ a. } \tan \varphi &= \frac{R}{L\omega} - RC\omega & \square \text{ b. } \tan \varphi &= \frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega} \\ \square \text{ c. } u(t) &\text{ est en avance sur } j(t) & \square \text{ d. } j(t) &\text{ est en avance sur } u(t) \end{aligned}$$

- 12** Soit un circuit (R, L, C) série soumis à une différence de potentiel sinusoïdale $u(t) = U\sqrt{2}\cos \omega t$ de pulsation réglable.



- ☐ a. Il y a une résonance d'intensité si la résistance est suffisamment petite.
☐ b. Il y a une résonance d'intensité si la résistance est suffisamment grande.
☐ c. Il y a une résonance d'intensité quelle que soit la valeur de la résistance.
☐ d. Il y a une résonance d'intensité pour la pulsation $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

- 13** Soit un circuit (R, L, C) série soumis à une différence de potentiel sinusoïdale $u(t) = U\sqrt{2}\cos \omega t$ de pulsation réglable. Si L et C sont fixées et que l'on fait varier R :

- ☐ a. La résonance d'intensité est d'autant plus aiguë que R est grande.
☐ b. La résonance d'intensité est d'autant plus aiguë que R est petite.
☐ c. La largeur de bande passante est donnée par $\Delta\omega = \frac{R}{L}$.
☐ d. La largeur de bande passante est donnée par $\Delta\omega = \frac{1}{RC}$.

- 14** Soit un circuit (R, L, C) série soumis à une différence de potentiel sinusoïdale $u(t) = U\sqrt{2}\cos\omega t$ de pulsation réglable.
- ☐ a. Il y a une résonance de charge si la résistance est suffisamment petite.
 - ☐ b. Il y a une résonance de charge si la résistance est suffisamment grande.
 - ☐ c. Il y a une résonance de charge pour la pulsation $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$.
 - ☐ d. Il y a une résonance de charge pour la pulsation $\omega = \sqrt{\frac{R^2}{2L^2} - \frac{1}{LC}}$.
- 15** Soit un circuit (R, L, C) série soumis à une différence de potentiel sinusoïdale $u(t) = U\sqrt{2}\cos\omega t$ de pulsation réglable.
- ☐ a. Il y a une résonance de puissance si la résistance est suffisamment petite.
 - ☐ b. Il y a une résonance de puissance si la résistance est suffisamment grande.
 - ☐ c. Il y a résonance de puissance pour la pulsation $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.
 - ☐ d. Il n'y a pas de phénomène de résonance de puissance.

Voir corrigés page 77

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

- Impédances d'entrée et de sortie.
- Fonction de transfert.
- Diagramme de Bode.
- Bande passante, pulsations de coupure.
- Fonctions de transfert d'ordre 1.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication.

1 Impédances d'entrée et de sortie

☐ V ☐ F **a.** L'impédance d'entrée d'un quadripôle dépend du générateur branché à l'entrée.

☐ V ☐ F **b.** L'impédance de sortie d'un quadripôle dépend du dipôle branché côté sortie.

2 Fonction de transfert

☐ V ☐ F **a.** La fonction de transfert d'un quadripôle ne dépend que de la structure du quadripôle.

☐ V ☐ F **b.** Une chaîne de quadripôle a pour fonction de transfert le produit des fonctions de transfert de chaque quadripôle pris individuellement.

3 Diagramme de Bode

☐ V ☐ F a. Le gain en décibels d'un quadripôle est défini par

$G_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{U_s}{U_e} \right)$ où U_e est la valeur efficace de la tension d'entrée et U_s la valeur efficace de la tension de sortie.

☐ V ☐ F b. L'argument de la fonction de transfert représente le déphasage entre l'entrée et la sortie.

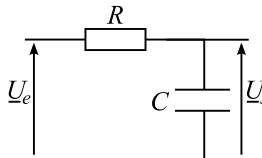
4 Bande passante

☐ V ☐ F La bande passante à -3 dB est identique à la bande passante définie par le critère $|H| \geq \frac{|H|_{\max}}{\sqrt{2}}$.

Consignes

QCM

Il peut y avoir, pour certaines questions, deux propositions exactes.

5 Calculer la fonction de transfert du circuit (supposé non chargé) :

☐ a. $\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$

☐ b. $\underline{H} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$

☐ c. La pulsation de coupure à -3 dB est $\omega_c = RC$.

☐ d. La pulsation de coupure à -3 dB est $\omega_c = \frac{1}{RC}$.

6 Soit le circuit de la question 5. Le tracé du diagramme de Bode pour le gain G_{dB} comporte :

☐ a. Une asymptote horizontale et une asymptote de pente 20 dB/dec.

☐ b. Une asymptote horizontale et une asymptote de pente -20 dB/dec.

☐ c. Une asymptote de pente -20 dB/dec et une asymptote de pente 20 dB/dec.

☐ d. Deux asymptotes horizontales.

7 Si on pose $u_e(t) = U_e \sqrt{2} \cos \omega t$ et $u_s(t) = U_s \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$, le déphasage φ vérifie :

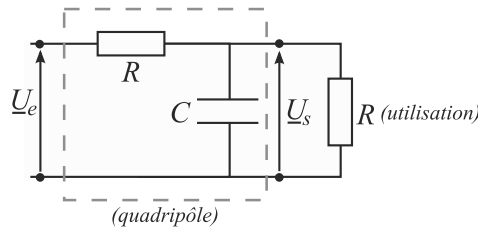
☐ a. $\tan \varphi = \frac{1}{RC\omega}$

☐ b. $\tan \varphi = -RC\omega$

☐ c. La sortie est en retard sur l'entrée.

☐ d. La sortie est en avance sur l'entrée.

8 On branche en sortie du quadripôle de la question 5 une résistance R identique à la première. La tension d'entrée $u_e(t)$ est délivrée par un générateur de Thévenin non représenté, de force électromotrice $e(t) = E \sqrt{2} \cos \omega t$ et de résistance interne r_g . Déterminer l'impédance d'entrée $\underline{Z}_e$ et l'impédance de sortie $\underline{Z}_s$.



☐ a. $\underline{Z}_e = R \left(\frac{2 + jRC\omega}{1 + jRC\omega} \right)$

☐ b. $\underline{Z}_e = r_g + 2R + \frac{1}{jC\omega}$

☐ c. $\underline{Z}_s = r_g + R + \frac{1}{jC\omega}$

☐ d. $\underline{Z}_s = \frac{r_g + R}{1 + jC\omega(r_g + R)}$

9 Calculer la fonction de transfert du circuit précédent et déterminer si :

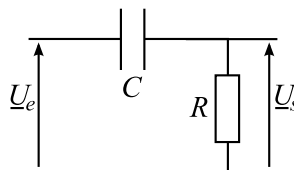
☐ a. l'amplification statique en tension est égale à 2.

☐ b. l'amplification statique en tension est égale à $\frac{1}{2}$.

☐ c. la pulsation de coupure à -3 dB est $\omega'_c = \frac{1}{RC}$

☐ d. la pulsation de coupure à -3 dB est $\omega'_c = \frac{2}{RC}$

10 Calculer la fonction de transfert du circuit (supposé non chargé) :

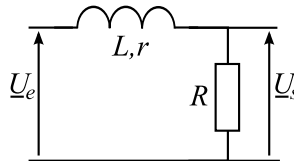


- ☐ a. $\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$
- ☐ b. $\underline{H} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$
- ☐ c. $\omega_c = \frac{1}{RC}$ est la pulsation de coupure basse à -3 dB.
- ☐ d. $\omega_c = \frac{1}{RC}$ est la pulsation de coupure haute à -3 dB.

11 Soit le circuit de la question 10. Le tracé du diagramme de Bode pour le gain G_{dB} comporte :

- ☐ a. Une asymptote horizontale et une asymptote de pente 20 dB/dec.
- ☐ b. Une asymptote horizontale et une asymptote de pente -20 dB/dec.
- ☐ c. Une asymptote de pente -20 dB/dec et une asymptote de pente 20 dB/dec.
- ☐ d. Une asymptote horizontale et une asymptote verticale.

12 Soit le quadripôle comportant une bobine réelle modélisable par une inductance pure L en série avec une résistance r et une résistance R .



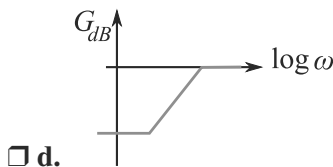
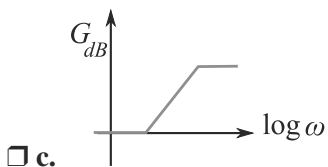
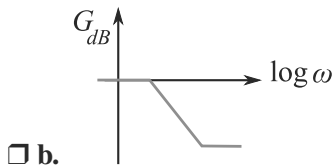
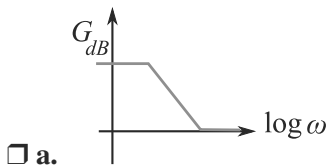
Déterminer l'amplification statique en tension.

- ☐ a. $H_0 = 1$ ☐ b. $H_0 = \frac{R}{r}$
- ☐ c. $H_0 = \frac{R}{r + R}$ ☐ d. $H_0 = \frac{r}{r + R}$

13 Déterminer la pulsation de coupure du quadripôle de la question 12.

- ☐ a. $\omega_c = \frac{R}{L}$ ☐ b. $\omega_c = \frac{r}{L}$
- ☐ c. $\omega_c = \frac{r + R}{L}$ ☐ d. $\omega_c = \frac{rR}{(r + R)L}$

- 14** La fonction de transfert d'un quadripôle se met sous la forme : $\underline{H} = \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}$ avec $\omega_2 \gg \omega_1$. Le diagramme de Bode asymptotique pour le gain a l'allure :



- 15** Pour la fonction de transfert de la question 14, le déphasage entre l'entrée et la sortie est maximal si :

- ☐ a. $\omega = 0$ ☐ b. $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$
☐ c. $\omega = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ ☐ d. ω tend vers l'infini

Voir corrigés page 85

Quadripôles 2

8

Programme PTSI, approfondissement MPSI

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

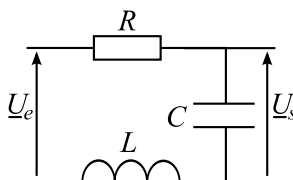
- Fonctions de transfert d'ordre 2.
- Lien entre fonction de transfert et régime transitoire (PTSI).

Consignes

QCM

Il peut y avoir, pour certaines questions, deux propositions exactes.

- 1 Calculer la fonction de transfert du circuit (supposé non chargé) :



☐ a. $\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$

☐ b. $\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$

☐ c. $\underline{H} = \frac{1}{1 - j\frac{R}{L\omega} - \frac{1}{LC\omega^2}}$

☐ d. $\underline{H} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)}$

- 2 Soit le circuit de la question 1. Le tracé du diagramme de Bode pour le gain G_{dB} comporte :

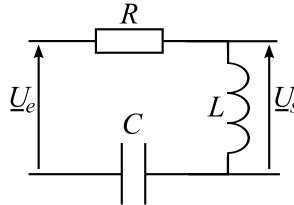
- ☐ a. Une asymptote horizontale et une asymptote de pente -20 dB/dec.
- ☐ b. Une asymptote horizontale et une asymptote de pente -40 dB/dec.
- ☐ c. Une asymptote de pente -20 dB/dec et une asymptote de pente 20 dB/dec.
- ☐ d. Une asymptote horizontale et une asymptote de pente $+40$ dB/dec.

- 3** Soit le circuit de la question 1. Si on pose $u_e(t) = U_e \sqrt{2} \cos \omega t$ et $u_s(t) = U_s \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$, alors le déphasage φ vérifie :

☐ a. $\tan \varphi = \frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}$ ☐ b. $\tan \varphi = \frac{1}{RC\omega} - \frac{L\omega}{R}$

☐ c. $\tan \varphi = \frac{RC\omega}{LC\omega^2 - 1}$ ☐ d. $\tan \varphi = \frac{1}{RC\omega} - \frac{L\omega}{R}$

- 4** Calculer la fonction de transfert du circuit (supposé non chargé) :



☐ a. $\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{R}{jL\omega}}$ ☐ b. $\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$

☐ c. $\underline{H} = \frac{1}{1 - j\frac{R}{L\omega} - \frac{1}{LC\omega^2}}$ ☐ d. $\underline{H} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)}$

- 5** Soit le circuit de la question 4. Le tracé du diagramme de Bode pour le gain G_{dB} comporte :

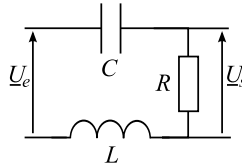
- ☐ a. Une asymptote horizontale et une asymptote de pente + 20 dB/dec.
☐ b. Une asymptote horizontale et une asymptote de pente - 40 dB/dec.
☐ c. Une asymptote de pente - 20 dB/dec et une asymptote de pente 20 dB/dec.
☐ d. Une asymptote horizontale et une asymptote de pente + 40 dB/dec.

- 6** Soit le circuit de la question 4. Si on pose $u_e(t) = U_e \sqrt{2} \cos \omega t$ et $u_s(t) = U_s \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$, le déphasage φ vérifie :

☐ a. $\tan \varphi = \frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}$ ☐ b. $\tan \varphi = \frac{1}{RC\omega} - \frac{L\omega}{R}$

☐ c. $\tan \varphi = \frac{RC\omega}{LC\omega^2 - 1}$ ☐ d. $\tan \varphi = \frac{1}{RC\omega} - \frac{L\omega}{R}$

- 7 Calculer la fonction de transfert du circuit (supposé non chargé) :



☐ a. $\underline{H} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)}$
☐ b. $\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$

☐ c. $\underline{H} = \frac{1}{1 - j\frac{R}{L\omega} - \frac{1}{LC\omega^2}}$
☐ d. $\underline{H} = \frac{j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)}{1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)}$

- 8 Soit le circuit de la question 7. Le tracé du diagramme de Bode pour le gain G_{dB} comporte :

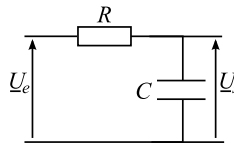
- ☐ a. Un maximum pour $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.
☐ b. Un minimum pour $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.
☐ c. Une asymptote de pente -20 dB/dec et une asymptote de pente 20 dB/dec.
☐ d. Une asymptote horizontale et une asymptote de pente $+40$ dB/dec.

- 9 Soit le circuit de la question 7. Si on pose $u_e(t) = U_e \sqrt{2} \cos \omega t$ et $u_s(t) = U_s \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$, le déphasage φ vérifie :

☐ a. $\tan \varphi = \frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}$
☐ b. $\tan \varphi = \frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}$

☐ c. $\tan \varphi = \frac{RC\omega}{LC\omega^2 - 1}$
☐ d. $\tan \varphi = \frac{1}{RC\omega} - \frac{L\omega}{R}$

- 10 Déterminer la fonction de transfert et en déduire l'équation différentielle du circuit :



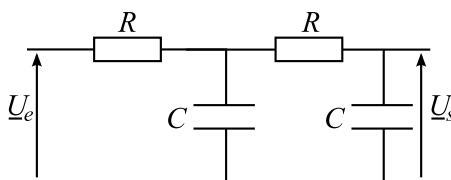
☐ a. $\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$
☐ b. $\underline{H} = 1 + jRC\omega$

☐ c. $\frac{du_s}{dt} + \frac{1}{RC}u_s = 0$
☐ d. $\frac{du_s}{dt} + \frac{1}{RC}u_s = \frac{u_e}{RC}$

- 11** Déterminer pour le circuit de la question **10** la relation entre la pulsation de coupure ω_C et le temps caractéristique τ .

- ☐ a. $\tau\omega_C = 1$
- ☐ b. $\tau\omega_C = \sqrt{2}$
- ☐ c. Le circuit est rapide si la bande passante est large.
- ☐ d. Le circuit est lent si la bande passante est large.

- 12** Déterminer la fonction de transfert et en déduire l'équation différentielle du circuit :



- ☐ a. $\underline{H} = \frac{1}{(1 + jRC\omega)^2}$
- ☐ b. $\underline{H} = \frac{1}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2}$
- ☐ c. $\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{2}{RC} \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{(RC)^2} u_s = \frac{u_e}{(RC)^2}$
- ☐ d. $\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{3}{RC} \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{(RC)^2} u_s = \frac{u_e}{(RC)^2}$

Voir les corrigés [92](#)

Amplificateur opérationnel

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

- AO idéal en régime linéaire
- AO idéal en mode comparateur (Travaux pratiques).

Consignes

QCM

Il peut y avoir, pour certaines questions, deux propositions exactes.

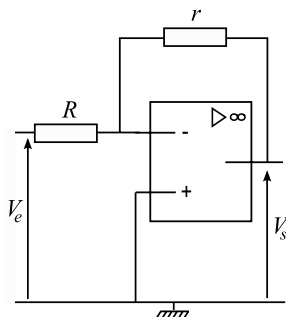
La question 8 n'est pas au programme de MPSI.

Dans tout le chapitre on considère un amplificateur opérationnel idéal, de tensions de saturation symétriques $\pm V_{sat}$.

1 On dispose d'un amplificateur opérationnel idéal et de deux résistances $R_A = 10 \text{ k}\Omega$ et $R_B > R_A$ à choisir. On souhaite réaliser un circuit amplificateur tel que la tension de sortie soit égale à 4 fois la tension d'entrée et de même signe. Représenter le montage et en déduire la valeur de R_B .

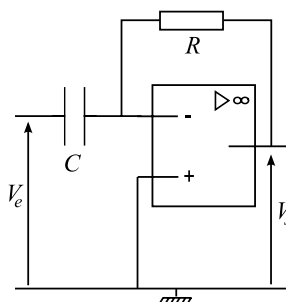
- ☐ a. $R_B = 20 \text{ k}\Omega$ ☐ b. $R_B = 30 \text{ k}\Omega$
☐ c. $R_B = 40 \text{ k}\Omega$ ☐ d. $R_B = 50 \text{ k}\Omega$

- 2 L'amplificateur opérationnel est supposé idéal. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$ en régime sinusoïdal.



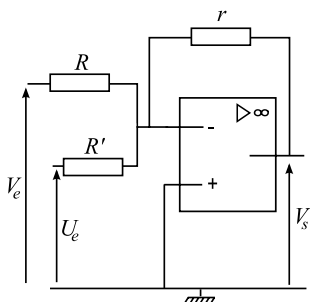
- ☐ a. $\underline{H} = \frac{R}{r}$ ☐ b. $\underline{H} = \frac{r}{R}$
☐ c. $\underline{H} = -\frac{R}{r}$ ☐ d. $\underline{H} = -\frac{r}{R}$

- 3 Soit le circuit comportant un amplificateur opérationnel idéal, un condensateur et un résistor ; la tension d'entrée est sinusoïdale.



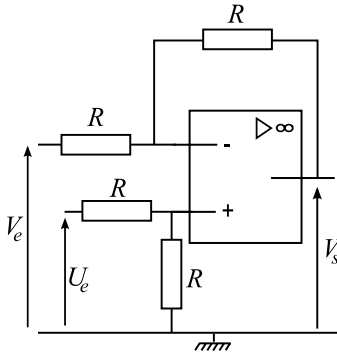
- ☐ a. Le montage est dérivateur.
☐ b. Le montage est intégrateur.
☐ c. $\underline{V}_e = -jRC\omega \underline{V}_s$
☐ d. $\underline{V}_e = -jRC\omega \underline{V}_s$

- 4 Déterminer la relation entre les tensions U_e , V_e et V_s si $R = 10 \text{ k}\Omega$, $R' = 20 \text{ k}\Omega$ et $r = 100 \text{ k}\Omega$.



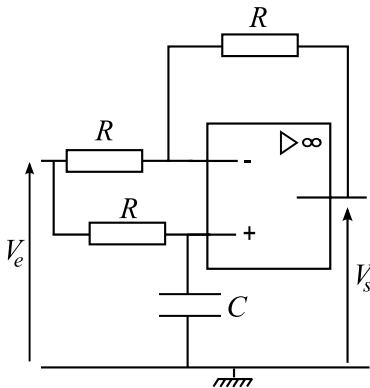
- ☐ a. $V_s = 10V_e + 5U_e$
☐ b. $V_s = -10V_e - 5U_e$
☐ c. $V_s = 10V_e + 5U_e$
☐ d. $V_s = -10V_e - 5U_e$

- 5 Déterminer la relation entre les tensions U_e , V_e et V_s .



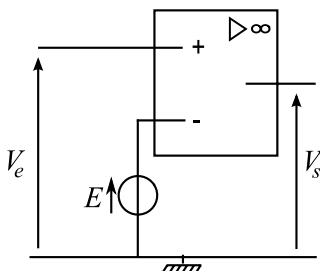
- ☐ a. $V_s = V_e + U_e$
☐ b. $V_s = V_e - U_e$
☐ c. $V_s = U_e - V_e$
☐ d. $V_s = -(V_e + U_e)$

- 6 Déterminer la fonction de transfert du montage ainsi que le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée, la tension d'entrée étant sinusoïdale :



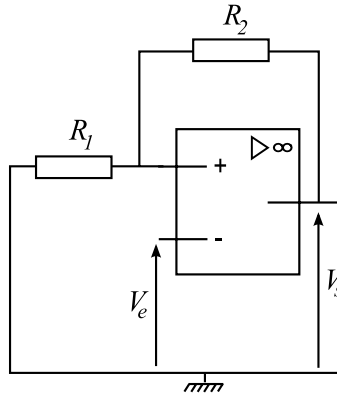
- ☐ a. $\underline{H} = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}$
☐ b. $\underline{H} = \frac{1 + jRC\omega}{1 - jRC\omega}$
☐ c. $\varphi = -2\text{Arctan}(RC\omega)$
☐ d. $\varphi = 2\text{Arctan}\left(\frac{1}{RC\omega}\right)$

- 7 L'amplificateur opérationnel étant idéal, déterminer si :



- ☐ a. $V_s = V_{sat}$ pour $V_e < E$
☐ b. $V_s = V_{sat}$ pour $V_e > E$
☐ c. Le montage est comparateur.
☐ d. Le montage est amplificateur.

- 8** Déterminer les valeurs de la tension d'entrée provoquant le basculement de la tension de sortie entre les valeurs $+V_{sat}$ et $-V_{sat}$.



- ☐ a. Dans le sens montant, la tension de basculement est $V_B = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$.
- ☐ b. Dans le sens montant, la tension de basculement est $V'_B = \frac{-R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$.
- ☐ c. Dans le sens descendant, la tension de basculement est $V_B = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$.
- ☐ d. Dans le sens descendant, la tension de basculement est $V'_B = \frac{-R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$.

Voir corrigés page [98](#)

3 Lois de l'électrocinétique

VRAI/FAUX

1 Circuits linéaires

☐ V ☒ F a. L'intensité du courant est la même en tout point d'un circuit série quelle que soit la fréquence.

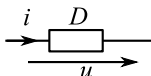
Pour pouvoir faire cette hypothèse, il faut être dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires. On peut alors négliger le temps de propagation du signal d'un point du circuit à un autre. Il faut pour cela que la période du signal (ou le temps caractéristique de variation si le signal n'est pas périodique) soit grande par rapport au temps de propagation à l'intérieur du circuit. Qualitativement, il ne faut pas que les variations soient trop rapides, c'est-à-dire que la fréquence soit trop élevée.

☒ V ☐ F b. Un dipôle dont la relation tension-courant en convention récepteur est : $i(t) = Gu(t) + C \frac{du}{dt}$ où G et C sont deux constantes est un dipôle linéaire.

Un dipôle est dit linéaire si la tension à ses bornes et l'intensité du courant qui le traverse sont liées par une relation différentielle linéaire : c'est bien le cas de la relation proposée (qui pourrait caractériser un résistor en série avec un condensateur).

2 Aspect énergétique

☐ V ☒ F a. Soit le dipôle symboliquement représenté par :



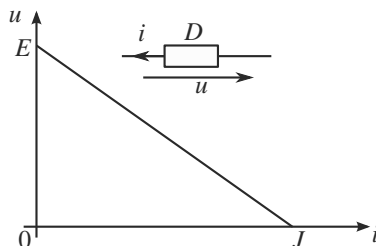
L'énergie qu'il reçoit entre deux instants t_1 et t_2 s'écrit : $W = \int_{t_1}^{t_2} u(t)i(t)dt$

Le dipôle est orienté en convention générateur. Dans ce cas le produit $u(t)i(t)$ correspond à la puissance qu'il cède au reste du circuit, pas à la puissance reçue.

☐ V ☒ F b. Un dipôle qui consomme de l'énergie électrique, comme un résistor, doit être orienté en convention récepteur.

La convention d'orientation est complètement indépendante du fonctionnement réel du dipôle ; une fois l'orientation choisie, le signe du produit $u(t)i(t)$ indiquera quel est le mode de fonctionnement du dipôle.

☐ V ☒ F c. Le dipôle D dont la caractéristique est donnée ci-dessous fonctionne en générateur :



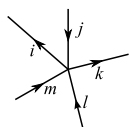
Le dipôle est orienté en convention récepteur. Il fonctionnera donc en générateur si la puissance instantanée $P(t) = u(t)i(t)$ est négative. Or ici $i > 0$ et $u > 0$ donc la puissance est positive, le fonctionnement est donc récepteur.



Attention à l'erreur consistant à penser que si la relation tension-courant est de la forme $u = E - Ri$ le dipôle fonctionne automatiquement en générateur.

QCM

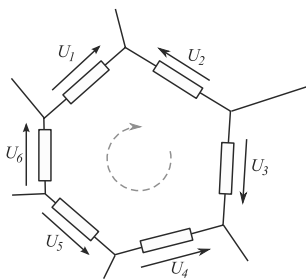
- 3** Écrire la loi des nœuds sachant que les intensités i et j sont positives, et que les autres intensités sont négatives :



- ☐ a. $i + j - k - l - m = 0$
☐ b. $-i + j + k - l - m = 0$
☒ c. $-i + j - k + l + m = 0$
☐ d. $-i + j - k + l - m = 0$

Il n'est pas nécessaire de connaître le signe des intensités pour écrire une loi des nœuds, il s'agit de tenir compte des orientations arbitrairement choisies pour chacune des branches liées au nœud. Ici les flèches concernant i et k partent du nœud, celles de j , l et m arrivent au nœud. La loi de nœud est par conséquent $j + l + m - i - k = 0$.

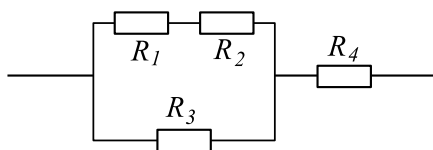
- 4** Écrire la loi des mailles sachant que les tensions U_1 et U_4 sont positives et que les autres tensions sont négatives :



- ☐ a. $U_1 - U_2 - U_3 + U_4 - U_5 - U_6 = 0$
☒ b. $U_1 - U_2 + U_3 - U_4 - U_5 + U_6 = 0$
☐ c. $U_1 + U_2 - U_3 - U_4 + U_5 + U_6 = 0$
☐ d. $U_1 + U_2 + U_3 - U_4 + U_5 + U_6 = 0$

De même, il n'est pas nécessaire de connaître le signe des tensions pour écrire une loi des mailles, il faut choisir un sens de parcours pour la maille et comparer le sens de chaque flèche de tension au sens de parcours. Par exemple ici en prenant le sens horaire : U_1 , U_3 , U_6 sont dans le sens de parcours, les autres sont en sens inverse. Donc la loi de maille s'écrit $U_1 - U_2 + U_3 - U_4 - U_5 + U_6 = 0$.

- 5** Déterminer la résistance équivalente R_{eq} à l'association :

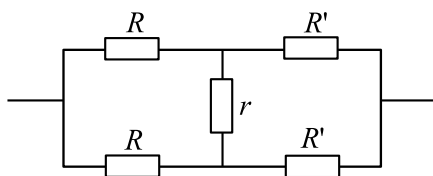


- ☐ a. $R_{eq} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_4$
☒ b. $R_{eq} = \frac{(R_1 + R_2) R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_4$
☐ c. $R_{eq} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$
☐ d. $R_{eq} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + R_4$

R_3 est en parallèle sur R_1 et R_2 qui sont en série, ce groupement a pour conductance $G = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{(R_1 + R_2)R_3}$ puisque les conductances en parallèle s'ajoutent.

Enfin R_4 est en série sur l'ensemble donc $R_{eq} = \frac{1}{G} + R_4$, les résistances s'ajoutant en série.

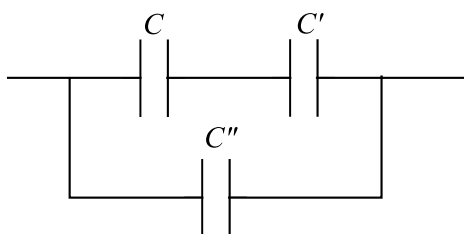
6 Déterminer la résistance équivalente R_{eq} à l'association :



- ☒ a. $R_{eq} = \frac{R + R'}{2}$
☐ b. $R_{eq} = \frac{R(r + R)}{r + 2R} + \frac{R'(r + R')}{r + 2R'}$
☐ c. $R_{eq} = \frac{R(r + 2R)}{r + 4R} + \frac{R'(r + 2R')}{r + 4R'}$
☐ d. $R_{eq} = \frac{R(2r + R)}{2(r + R)} + \frac{R'(2r + R')}{2(r + R')}$

Les différentes résistances ne sont pas associées en série ou en parallèle, mais compte tenu de la symétrie du circuit, l'intensité du courant est la même dans les deux résistors de résistance R donc ils sont soumis à la même différence de potentiel. La différence de potentiel aux bornes de r est donc nulle : ce résistor n'est parcouru par aucun courant. Tout se passe comme si on avait deux branches de résistance $R + R'$ en parallèle. Le circuit se simplifie donc et la résistance équivalente R_{eq} est donnée par : $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R + R'} + \frac{1}{R + R'}$
 $= \frac{2}{R + R'}$.

7 Déterminer la capacité équivalente C_{eq} à l'association :

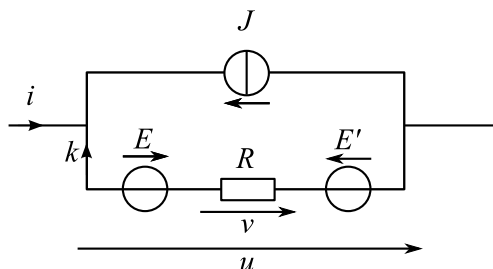


- ☐ a. $C_{eq} = \frac{CC' + C'C'' + CC''}{C + C' + C''}$
☐ b. $C_{eq} = \frac{CC'}{C''}$
☐ c. $C_{eq} = \frac{C''(C + C')}{C + C' + C''}$
☒ d. $C_{eq} = \frac{CC'}{C + C'} + C''$

En série les inverses des capacités s'ajoutent donc la branche contenant deux condensateurs est équivalente à un condensateur de capacité C_1 telle que $\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C'}$.

En parallèle les capacités s'ajoutent donc $C_{eq} = C_1 + C'' = \frac{CC'}{C + C'} + C''$

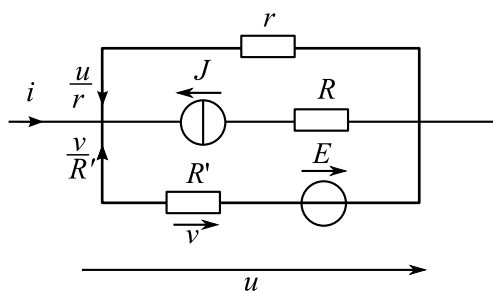
8 Écrire la relation $u = f(i)$:



- ☐ a. $u = -E + E' - RJ - Ri$
☐ b. $u = -E + E' + RJ + Ri$
☒ c. $u = E - E' - RJ - Ri$
☐ d. $u = E - E' + RJ + Ri$

Écrivons une loi des nœuds : $i + J + k = 0$ avec $k = \frac{v}{R} = \frac{u - E + E'}{R}$
 donc $\frac{u - E + E'}{R} = -i - J$ d'où on tire $u = E - E' - R(i + J) = E - E' - RJ - Ri$.

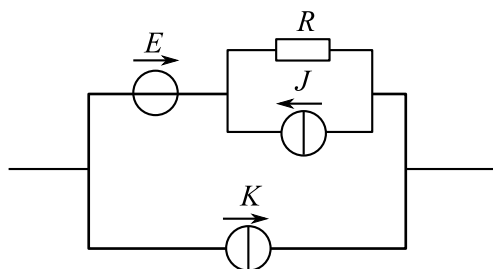
9 Écrire la relation $i = f(u)$:



- ☐ a. $i = -J - \frac{E}{R'} + u \frac{r + R'}{rR'}$
☒ b. $i = -J + \frac{E}{R'} - u \frac{r + R'}{rR'}$
☐ c. $i = J - \frac{E}{R'} + u \frac{r + R'}{rR'}$
☐ d. $i = J - \frac{E}{R'} - u \frac{r + R'}{rR'}$

Écrivons une loi des nœuds : $i + \frac{u}{r} + J + \frac{v}{R'} = 0$ d'où $i = -\frac{u}{r} - J - \frac{u - E}{R'} = -J + \frac{E}{R'} - u \frac{r + R'}{rR'}$

10 Déterminer le générateur de Thévenin équivalent en orientant la force électromotrice vers la droite :



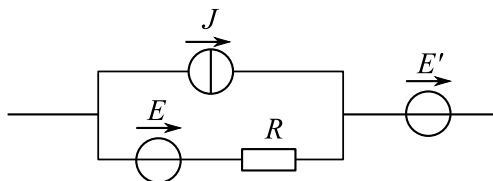
- ☐ a. $E_{eq} = E + R(K + J)$
☒ b. $E_{eq} = E + R(K - J)$
☒ c. $R_{eq} = R$
☐ d. $R_{eq} = \frac{R}{2}$

On procède par transformations successives, en faisant le choix d'orienter les sources de courant et de tension équivalentes dans le même sens que E et K .

Transformons le générateur de Norton (J, R) pour l'associer en série avec la source de tension E : on obtient un générateur de Thévenin de force électromotrice égale à $E - JR$ et de résistance interne R . On le transforme en générateur de Norton de courant électromoteur $\frac{E}{R} - J$ et de résistance interne R pour l'associer en parallèle avec la source de courant K . Le

nouveau courant électromoteur est égal à $\frac{E}{R} - J + K$. Enfin, on passe à nouveau en modèle de Thévenin. On arrive à une source de tension $E_{eq} = E + R(K - J)$ dans le même sens que E , en série avec R .

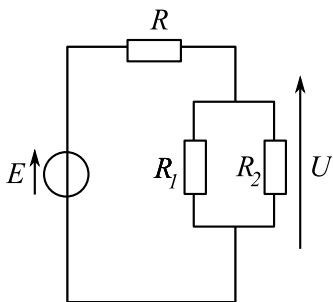
- 11** Déterminer le générateur de Norton équivalent en orientant le courant électromoteur vers la droite :



- ☐ a. $J_{eq} = J - \frac{E + E'}{R}$
☒ b. $J_{eq} = J + \frac{E + E'}{R}$
☒ c. $R_{eq} = R$
☐ d. $R_{eq} = 2R$

Transformons le générateur de Thévenin (E, R) pour l'associer en parallèle avec la source de courant J : on obtient un générateur de Norton de courant électromoteur $J + \frac{E}{R}$ en parallèle sur la résistance R , que l'on transforme en modèle de Thévenin pour lui associer en série la source de tension E' : la force électromotrice est égale à $E' + E + JR$ en série sur la résistance R . Enfin, on passe à nouveau en modèle de Norton. On arrive à une source de courant $J_{eq} = J + \frac{E + E'}{R}$ dans le même sens que J , en parallèle avec R .

- 12** Déterminer la tension U :

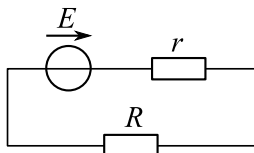


- ☐ a. $U = \frac{E(R_1 + R_2)}{R + R_1 + R_2}$
☐ b. $U = \frac{ER}{R + R_1 + R_2}$
☒ c. $U = \frac{ER_1R_2}{R(R_1 + R_2) + R_1R_2}$
☐ d. $U = \frac{ER_1R_2}{R(R_1 + R_2 + R)}$

Les deux résistances en parallèle peuvent être remplacées par une unique résistance R_{eq} qui forme un diviseur de tension avec la résistance R :

$$U = \frac{R_{eq}E}{R + R_{eq}} = \frac{E}{R \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + 1} = \frac{E}{R \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + 1} = \frac{ER_1R_2}{R(R_1 + R_2) + R_1R_2}$$

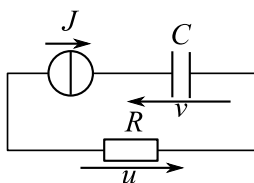
- 13** Déterminer la puissance reçue par le résistor de résistance R .



- ☐ a. $P = \frac{E^2}{R}$
☐ b. $P = r \left(\frac{E}{r+R} \right)^2$
☐ c. $P = \frac{E^2}{R+r}$
☒ d. $P = R \left(\frac{E}{r+R} \right)^2$

Le courant qui circule dans la maille, orienté dans le même sens que la source de tension, est égal à $i = \frac{E}{r+R}$. La puissance reçue par le résistor est $P = Ri^2$.

- 14** Déterminer l'énergie W_R reçue par le résistor pendant une durée T et l'énergie W_C reçue par le condensateur initialement déchargé pendant la même durée.



- ☒ a. $W_R = RJ^2T$
☐ b. $W_R = \frac{RJ^2T}{2}$
☐ c. $W_C = \frac{J^2T}{C}$
☒ d. $W_C = \frac{J^2T}{2C}$

Les deux dipôles sont orientés en convention récepteur sur le schéma du circuit.

La puissance reçue par le résistor est alors $P = uJ = RJ^2$. Elle est constante, et l'énergie reçue pendant une durée T est égale à $W_R = RJ^2T$.

La puissance reçue par le condensateur est $P(t) = v(t)J$ avec $v(t) = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int_0^t J dt = \frac{Jt}{C}$

donc $W_C = \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{C} \int_0^T J^2 t dt = \frac{J^2 T}{2C}$.

4 Circuits linéaires en régime permanent

VRAI/FAUX

- 1** Méthodes des mailles et des nœuds :

☐ V ☒ F a. Si un circuit comporte 3 mailles indépendantes et deux nœuds, il vaut mieux appliquer une méthode des mailles.

On essaie toujours de choisir la méthode donnant les calculs les plus simples. Ici, une méthode des mailles nécessitera d'écrire et de résoudre un système de trois équations à

trois inconnues, ce qui est beaucoup plus compliqué que l'utilisation d'une méthode des nœuds (ici, deux équations si les nœuds sont indépendants, voire une seule si le circuit est formé de branches en parallèle entre ces deux nœuds).

☐ V ☒ F b. Quand on choisit une méthode des nœuds, les inconnues sont les intensités des courants.

Quand on met en œuvre une méthode des nœuds, on écrit des « lois des nœuds en tension », c'est-à-dire que dans chaque loi des nœuds les intensités des courants sont exprimées en fonction des tensions aux bornes des dipôles.

2 Équivalences et associations de générateurs :

☐ V ☒ F a. Il est toujours possible de transformer les générateurs de tension en générateurs de courant, ou réciproquement.

Il peut y avoir équivalence entre un générateur de tension et un générateur de courant si ce sont des générateurs « réels », c'est-à-dire s'ils possèdent une résistance interne non nulle et non infinie. Une source de tension ($U = E$ quelle que soit l'intensité) ne peut pas être remplacée par une source de courant ($I = J_N$ quelle que soit la tension).

☒ V ☐ F b. Les associations « parallèles » sont plus commodes à traiter en choisissant le modèle de Norton.

En effet, le modèle de Norton, constitué d'une source de courant en parallèle sur une résistance, permet de traiter les associations parallèles suivant des lois simples, puisqu'alors les courants électromoteurs et les conductances s'ajoutent.

3 Théorème de superposition :

☐ V ☒ F a. Pour appliquer le théorème de superposition, on éteint un par un chacun des générateurs.

Non, on garde un par un chacun des générateurs, les autres étant remplacés par leur résistance interne. Attention, c'est une erreur souvent rencontrée !

☐ V ☒ F b. Pour éteindre une source de tension, on la débranche.

Il faut la court-circuiter, c'est-à-dire la remplacer par un fil. Un générateur de Thévenin, constitué d'une source de tension en série avec une résistance, sera alors remplacé par sa résistance interne.

☒ V ☐ F c. Pour éteindre une source de courant on la débranche.

Ceci a pour conséquence qu'un générateur de Norton sera lui aussi remplacé par sa résistance interne.

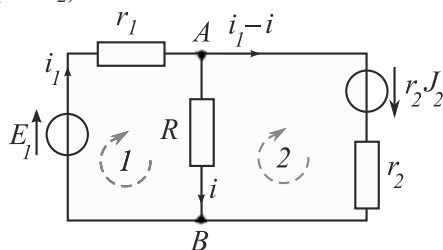
QCM

- 4** Méthode des mailles : les générateurs sont en représentation de Thévenin. Écrire deux lois des mailles faisant intervenir i et i_1 .

☒ a. $E_1 = r_1 i_1 + Ri$ ☐ b. $r_2 J_2 = r_2 i_1 + (R - r_2) i$

☐ c. $E_1 = r_1 i_1 - Ri$ ☒ d. $r_2 J_2 = r_2 i_1 - (R + r_2) i$

On transforme le générateur de Norton en générateur de Thévenin et on satisfait à la loi des nœuds en A.



Maille 1 : les résistances r_1 et R sont en convention générateur dans le sens de parcours arbitraire choisi sur la figure, la source de tension est dans le même sens que le sens de parcours. La loi des mailles s'écrit donc : $E_1 - r_1 i_1 - Ri = 0$.

Maille 2 : la résistance r_2 est en convention générateur dans le sens de parcours arbitraire choisi sur la figure, la résistance R est en convention récepteur, la source de tension est dans le même sens que le sens de parcours. La loi des mailles s'écrit donc : $r_2 J_2 - r_2(i_1 - i) + Ri = 0$.

- 5** En déduire le courant circulant de A à B à travers la résistance R .

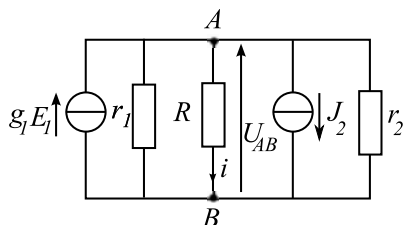
☐ a. $i = \frac{r_2 E_1 + r_1 r_2 J_2}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$ ☐ b. $i = \frac{r_1 r_2 J_2 - r_2 E_1}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$

☒ c. $i = \frac{r_2 E_1 - r_1 r_2 J_2}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$ ☐ d. $i = \frac{-r_2 E_1 - r_1 r_2 J_2}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$

On combine les relations précédentes pour éliminer i_1 : par exemple on multiplie la première par r_2 et la deuxième par r_1 et on soustrait.

On obtient alors $i = \frac{r_2 E_1 - r_1 r_2 J_2}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$.

- 6** Méthode des nœuds : les générateurs sont en représentation de Norton. Écrire la relation vérifiée par la tension U_{AB} (loi des nœuds en tension). Il sera pratique d'introduire les conductances : $G = \frac{1}{R}$, $g_1 = \frac{1}{r_1}$ et $g_2 = \frac{1}{r_2}$.



☐ a. $g_1 E_1 + J_2 = (G + g_1 + g_2) U_{AB}$

☒ b. $g_1 E_1 - J_2 = (G + g_1 + g_2) U_{AB}$

☐ c. $J_2 - g_1 E_1 = (G + g_1 + g_2) U_{AB}$

☐ d. $g_1 E_1 - J_2 = (G - g_1 - g_2) U_{AB}$

En écrivant que la somme des courants arrivant en A est égale à la somme des courants qui repartent, on obtient la relation : $g_1 E_1 - g_1 U_{AB} = G U_{AB} + J_2 + g_2 U_{AB}$.

Le circuit étant à structure parallèle, cette méthode est préférable à la précédente.

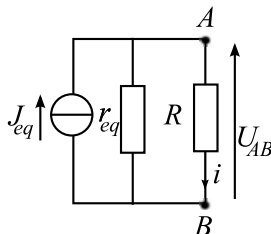
7 En déduire la tension U_{AB} puis le courant dans la résistance R .

☐ a. $U_{AB} = \frac{g_1 E_1 + J_2}{G + g_1 + g_2}$ ☒ b. $U_{AB} = \frac{g_1 E_1 - J_2}{G + g_1 + g_2}$

☐ c. $i = G \frac{g_1 E_1 + J_2}{G + g_1 + g_2}$ ☒ d. $i = G \frac{g_1 E_1 - J_2}{G + g_1 + g_2}$

La tension U_{AB} s'obtient directement à partir de la relation précédente, puis on multiplie par G pour obtenir le courant soit : $i = G \frac{g_1 E_1 - J_2}{G + g_1 + g_2}$. On pourra vérifier que le résultat est similaire à celui de la question 5 en multipliant le numérateur et le dénominateur de la fraction par le produit $R r_1 r_2$.

8 Remplacer les deux générateurs par un générateur de Norton équivalent (orienter la source de courant de B vers A).



☐ a. $J_{eq} = \frac{E_1}{r_1} + J_2$

☒ b. $r_{eq} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$

☒ c. $J_{eq} = \frac{E_1}{r_1} - J_2$

☐ d. $r_{eq} = \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}$

En partant du schéma de la question 7, on associe en parallèle les deux générateurs de Norton ; les courants électromoteurs sont en sens opposés donc $J_{eq} = g_1 E_1 - J_2$ et les conductances internes s'ajoutent : $g_{eq} = \frac{1}{r_{eq}} = g_1 + g_2$.

9 Utiliser un diviseur de courant pour déterminer l'intensité dans la résistance R .

☐ a. $i = \frac{-r_2 E_1 + r_1 r_2 J_2}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$ ☐ b. $i = \frac{r_2 E_1 + r_1 r_2 J_2}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$

☐ c. $i = -\frac{r_2 E_1 + r_1 r_2 J_2}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$ ☒ d. $i = \frac{r_2 E_1 - r_1 r_2 J_2}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$

Le courant J_{eq} se partage entre les conductances G et g_{eq} en parallèle donc

$i = \frac{G}{g_{eq} + G} J_{eq} = \frac{G (g_1 E_1 - J_2)}{g_1 + g_2 + G}$; on remplace ensuite en fonction des données de départ.

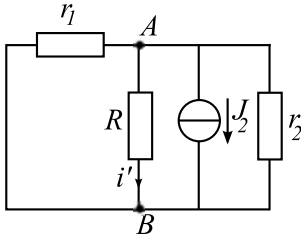
- 10** Éteindre le générateur de Thévenin et déterminer l'intensité i' circulant de A à B dans la résistance R .

☐ a. $i' = \frac{r_1 r_2 J_2}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$

☐ b. $i' = \frac{R J_2}{r_1 + R + r_2}$

☒ c. $i' = \frac{-r_1 r_2 J_2}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$

☐ d. $i' = \frac{-R J_2}{r_1 + R + r_2}$



Quand on court-circuite la source de tension, la résistance r_1 se retrouve en parallèle sur R et r_2 . On obtient grâce à un diviseur de courant la relation :

$$i' = \frac{G}{g_1 + g_2 + G} (-J_2).$$



Il faut faire attention aux orientations contraires de i' et J_2 d'où le signe « - » dans l'expression.

- 11** Éteindre le générateur de Norton et déterminer l'intensité i'' dans la résistance R .

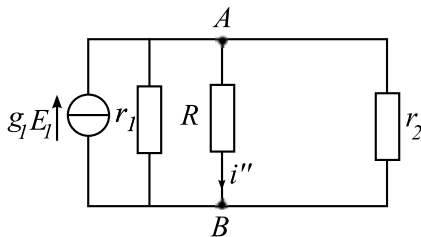
☒ a. $i'' = \frac{r_2 E_1}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$

☐ b. $i'' = \frac{R E_1}{r_1 (r_1 + R + r_2)}$

☐ c. $i'' = \frac{-r_2 E_1}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$

☐ d. $i'' = \frac{-R E_1}{r_1 (r_1 + R + r_2)}$

En représentant le générateur de gauche en modèle de Norton, le schéma du circuit devient :



La situation est similaire à celle de la question précédente, mais avec des courants dans le même sens d'où : $i'' = \frac{G}{g_1 + g_2 + G} (g_1 E_1) = \frac{r_2 E_1}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$.

- 12** En déduire le courant dans la résistance R en présence des deux générateurs.

☐ a. $i = \frac{r_2 E_1 + r_1 r_2 J_2}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$

☒ b. $i = \frac{r_2 E_1 - r_1 r_2 J_2}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R}$

☐ c. $i = \frac{R(E_1 - r_1 j_2)}{r_1 (r_1 + R + r_2)}$

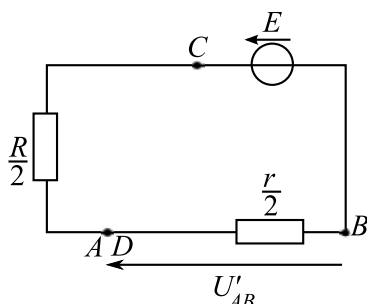
☐ d. $i = \frac{R(E_1 + r_1 j_2)}{r_1 (r_1 + R + r_2)}$

D'après le théorème de superposition, on somme les deux résultats précédents pour obtenir le courant i : $i = i' + i''$.

- 13** Calculer la tension U'_{AB} quand on garde le générateur de droite allumé, puis la tension U''_{AB} quand on garde le générateur de gauche allumé.

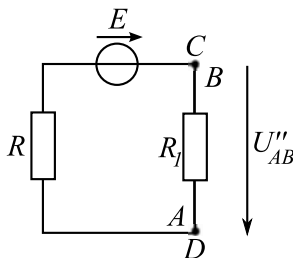
☐ a. $U'_{AB} = \frac{-Er}{r+R}$ ☒ b. $U'_{AB} = \frac{Er}{r+R}$
☒ c. $U''_{AB} = \frac{-rE}{2(R+r)}$ ☐ d. $U''_{AB} = \frac{rE}{2(R+r)}$

Quand seule subsiste la source de tension de droite, le circuit se ramène au schéma suivant :



En effet les deux résistors R sont alors en parallèle et équivalents à une résistance $\frac{R}{2}$ et de même, les deux résistors r sont équivalents à une résistance $\frac{r}{2}$. Grâce à un diviseur de tension, $U'_{AB} = \frac{Er}{r+R}$.

Quand seule subsiste la source de tension de gauche, le circuit se ramène au schéma suivant :



avec R_1 correspondant à l'association en parallèle de deux résistances r et d'une résistance R . Grâce à un diviseur de tension, on obtient :

$$U''_{AB} = -\frac{ER_1}{R_1 + R} = -\frac{E}{1 + R\left(\frac{1}{R} + \frac{2}{r}\right)} \\ = \frac{-E}{2 + \frac{2R}{r}} = \frac{-rE}{2(R+r)}$$

- 14** Calculer le courant circulant de A à B dans la résistance r .

☐ a. $i = \frac{-E}{2(r+R)}$ ☒ b. $i = \frac{E}{2(r+R)}$
☐ c. $i = \frac{-E}{r+R}$ ☐ d. $i = \frac{E}{r+R}$

Par superposition, la tension U_{AB} est égale à $U'_{AB} + U''_{AB} = \frac{Er}{r+R} - \frac{Er}{2(r+R)}$.

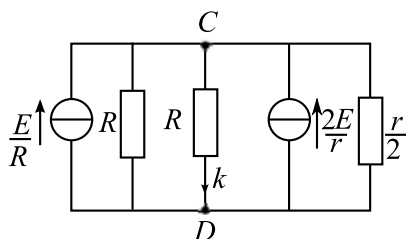
Le courant circulant de A à B dans la résistance r est, en convention récepteur, égal à

$$i = \frac{U_{AB}}{r} = \frac{E}{2(r+R)}.$$

- 15** Transformer le circuit initial en faisant apparaître deux générateurs de Norton et en déduire le courant k circulant de C à D .

☐ a. $k = \frac{E(2r+R)}{2r(R+r)}$ ☐ b. $k = \frac{E(2R+r)}{2r(R+r)}$
☒ c. $k = \frac{E(2R+r)}{2R(R+r)}$ ☐ d. $k = \frac{E(2r+R)}{2R(R+r)}$

Le circuit devient après transformation :



En effet, les deux résistances r en parallèle peuvent être remplacées par $\frac{r}{2}$ et les générateurs de Norton sont tous les deux branchés entre les points C et D .

Par un diviseur de courant, $k = \left(\frac{E}{R} + \frac{2E}{r} \right) \frac{\frac{1}{R}}{\frac{2}{R} + \frac{2}{r}} = \frac{E(2R+r)}{R(R+r)}$.

5 Circuits linéaires en régime transitoire

VRAI/FAUX

1 Conditions initiales

☐ V ☒ F a. Pour déterminer les constantes d'intégration lors de la résolution de l'équation différentielle d'un circuit comportant un condensateur et une bobine, on utilise la continuité de l'intensité du courant dans le condensateur.

La grandeur considérée comme continue en électrocinétique est l'énergie (on néglige la quantification de la charge qui en réalité est toujours multiple de la charge élémentaire).

Or l'énergie emmagasinée dans un condensateur est de la forme $W_C = \frac{1}{2}Cu^2 = \frac{q^2}{2C}$ où u désigne la tension aux bornes du condensateur et q sa charge. Ce sont la tension et la charge du condensateur qui sont continues et qui permettent d'écrire les conditions initiales. L'intensité, qui est la dérivée de la charge, n'est en général pas continue.

☒ V ☐ F b. Pour déterminer les constantes d'intégration lors de la résolution de l'équation différentielle d'un circuit comportant un condensateur et une bobine, on utilise la continuité de l'intensité du courant dans la bobine.

L'énergie emmagasinée dans une bobine étant de la forme $W_L = \frac{1}{2}Li^2$ et étant continue, l'intensité est elle-même continue.

2 Circuits d'ordre 1 en régime libre

☒ V ☐ F a. Un circuit comportant en série une résistance R et un condensateur de capacité C a pour temps caractéristique $\tau = RC$.

La loi des mailles de ce circuit s'écrit $u_R + u_C = Ri + u_C = 0$ avec $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$ en convention récepteur soit $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$.

En divisant par RC on obtient $\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = 0$.

La solution d'une telle équation est de la forme $u_C(t) = k \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$ où k est une constante dépendant des conditions initiales.

Le temps caractéristique est le coefficient apparaissant au dénominateur dans l'exponentielle : $\tau = RC$ et $u_C(t) = k \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$; ce coefficient est représentatif de la rapidité d'évolution du circuit. Plus il est grand, plus la tension varie lentement.

Finalement, l'équation différentielle sous forme canonique est : $\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = 0$.

☐ V ☒ F b. Un circuit comportant en série une résistance R et une bobine idéale d'inductance L a pour temps caractéristique $\tau = \frac{R}{L}$.

Dans ce cas la loi des mailles de ce circuit s'écrit $u_R + u_L = Ri + L \frac{di}{dt}$. Mettons-la directement sous forme canonique en divisant par L : $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0$ qui est de la forme $\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0$ à condition de poser $\tau = \frac{L}{R}$.

On remarque au passage que $\frac{L}{R}$ et RC ont la dimension d'une durée, ce qui est un moyen de vérifier l'homogénéité des expressions.

3 Circuits d'ordre 2 en régime libre

☐ V ☒ F a. Un circuit comporte en série une résistance R réglable, un condensateur de capacité C et une bobine idéale d'inductance L fixes. Une grande valeur de R permet d'observer des oscillations de la tension aux bornes du condensateur.

La loi des mailles du circuit conduit à l'équation différentielle :

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0.$$

L'équation caractéristique associée a les mêmes coefficients : $LCx^2 + RCx + 1 = 0$.

La forme des solutions dépend des racines x de l'équation caractéristique : si elles sont complexes (cas d'un discriminant négatif) cela correspond à une solution du type oscillatoire amorti.

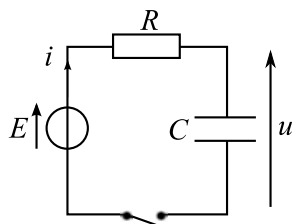
Or le discriminant est $\Delta = (RC)^2 - 4LC$. Il est négatif pour $RC < 2\sqrt{LC}$ donc la condition est $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

☒ V ☐ F b. Le régime permanent est atteint au bout d'un temps minimum si la résistance a pour valeur $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Cette valeur de R , que l'on appelle résistance critique, correspond à l'annulation du discriminant du polynôme caractéristique. C'est précisément pour cette valeur que la variation de u_C est la plus rapide. Pour $R > R_C$, il n'y a pas d'oscillations et le retour au régime permanent est plus long (régime apériodique). Pour $R < R_C$, d'après la question précédente, le régime est oscillatoire amorti (régime pseudo-périodique).

QCM

4 Un circuit série comporte une source de tension E , une résistance R et un condensateur C ainsi qu'un interrupteur :



À l'instant $t = 0$ où on ferme l'interrupteur le condensateur est chargé (charge q_0). Le courant $i(t)$ circulant dans le circuit est alors :

- ☐ a. $i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$ ☐ b. $i(t) = \frac{q_0}{RC} (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$
☒ c. $i(t) = \left(\frac{E}{R} - \frac{q_0}{RC}\right) e^{-\frac{t}{RC}}$ ☐ d. $i(t) = \left(\frac{E}{R} + \frac{q_0}{RC}\right) e^{-\frac{t}{RC}}$

En écrivant la loi des mailles on obtient l'équation différentielle du circuit

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC}u = \frac{1}{RC}E \text{ et en posant } \tau = RC, \text{ la solution est de la forme } u(t) = k \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + E.$$



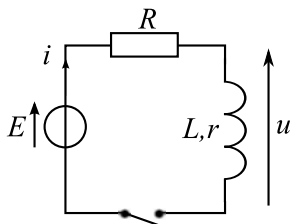
À ne pas oublier la solution particulière $u_p = E$, qui est du même type que le second membre, une constante ici.

Les conditions initiales sont à appliquer à la solution complète de l'équation.

D'après ces conditions initiales, $q_0 = Cu(0) = C(k + E)$ d'où $k = \frac{q_0}{C} - E$. Le courant $i(t)$ s'obtient après dérivation : $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} = C \left(-\frac{k}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$.

Finalement $i(t) = (CE - q_0) \left(\frac{1}{RC}\right) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$.

- 5** Un circuit série comporte une source de tension E , une résistance R et une bobine assimilable à une résistance r en série avec une inductance pure L ainsi qu'un interrupteur.



À l'instant $t = 0$ on ferme l'interrupteur. Le courant $i(t)$ circulant dans le circuit est alors :

- ☐ a. $i(t) = \frac{E}{r+R} e^{-\frac{tR}{L}}$ ☐ b. $i(t) = \frac{E}{r+R} (1 - e^{-\frac{tR}{L}})$
☐ c. $i(t) = \frac{E}{r+R} e^{-\frac{t(r+R)}{L}}$ ☒ d. $i(t) = \frac{E}{r+R} (1 - e^{-\frac{t(r+R)}{L}})$

La loi des mailles du circuit est : $E = Ri + ri + L \frac{di}{dt}$. On divise par L et on pose $\tau = \frac{L}{r+R}$ pour obtenir : $\frac{E}{L} = \frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau}$. La solution générale de l'équation est de la forme $i(t) = \frac{\tau E}{L} + k \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, et le courant étant continu dans la bobine, à $t = 0$, $i(0) = 0 = \frac{\tau E}{L} + k$ donc $k = -\frac{\tau E}{L} = -\frac{E}{r+R}$.

- 6** Un circuit série comporte une source de tension E , une résistance R et une bobine assimilable à une résistance r en série avec une inductance pure L ainsi qu'un interrupteur. À l'instant $t = 0$ on ferme l'interrupteur. La tension aux bornes de la bobine $u(t)$ est alors :

- ☐ a. $u(t) = E e^{-\frac{t(r+R)}{L}}$ ☐ b. $u(t) = E e^{-\frac{tR}{L}}$
☒ c. $u(t) = \frac{E}{r+R} \left(r + R e^{-\frac{t(r+R)}{L}} \right)$ ☐ d. $u(t) = \frac{RE}{r+R} e^{-\frac{tR}{L}}$

La tension aux bornes de la bobine, compte tenu de sa résistance r , est

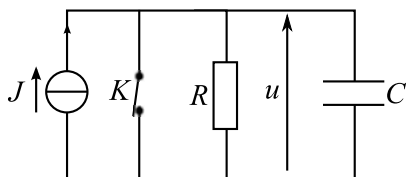
$$u(t) = L \frac{di}{dt} + ri = L \left(-\frac{1}{\tau} \right) \left(-\frac{E}{r+R} \right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + r \left[\frac{\tau E}{L} + \left(-\frac{E}{r+R} \right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right].$$

Après simplification

$$u(t) = E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + r \left[\frac{E}{r+R} + \left(-\frac{E}{r+R} \right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$$

donc $u(t) = \frac{E}{r+R} \left(r + R e^{-\frac{t(r+R)}{L}} \right).$

- 7** Un circuit parallèle comporte une source de courant J , une résistance R et un condensateur C ainsi qu'un interrupteur.



À l'instant $t = 0$ où on ouvre l'interrupteur K le condensateur est déchargé. La tension $u(t)$ aux bornes de la source de courant est :

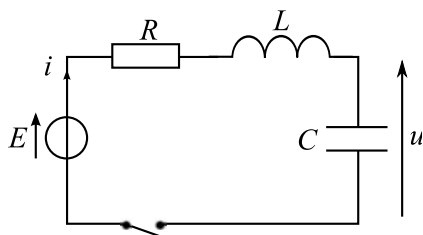
- ☐ a. $u(t) = JR e^{\frac{-t}{RC}}$ ☒ b. $u(t) = JR (1 - e^{\frac{-t}{RC}})$
☐ c. $u(t) = -JR e^{\frac{-t}{RC}}$ ☐ d. $u(t) = JR (e^{\frac{-t}{RC}} - 1)$

Grâce à une loi des nœuds, $J = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R}$. En divisant par C et en posant $\tau = RC$ la solution est de la forme $u(t) = JR + k \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$.

La tension est continue aux bornes du condensateur donc à $t = 0$, comme le condensateur est déchargé, $u(0) = 0 = JR + k$.

En reportant dans la solution générale, on obtient $u(t) = JR (1 - e^{\frac{-t}{RC}})$.

- 8** Un circuit série comporte une source de tension E , une résistance R , un condensateur C et une bobine de résistance négligeable assimilable à une inductance pure L ainsi qu'un interrupteur.



À l'instant $t = 0$, le condensateur est déchargé, on ferme l'interrupteur. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur $u(t)$ et la mettre sous forme canonique ; en déduire l'expression de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q_0 .

- ☐ a. $\omega_0 = \frac{1}{LC}$ ☒ b. $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
☒ c. $Q_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ ☐ d. $Q_0 = R \sqrt{\frac{C}{L}}$

La loi des mailles du circuit conduit à l'équation différentielle : $LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = E$.

En divisant par LC on obtient la forme canonique $\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = \frac{E}{LC}$. On pose

alors $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $\frac{\omega_0}{Q_0} = \frac{R}{L}$ soit $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q_0 = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{L}{R\sqrt{LC}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ d'où

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q_0} \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 E.$$

- 9** Dans cette question et les suivantes, le circuit est celui décrit à la question 8. Écrire l'équation caractéristique puis déterminer la valeur du facteur de qualité correspondant au changement de type de réponse du circuit.

☐ a. $Q_0 = 1$
 ☐ b. $Q_0 = 2$
 ☒ c. $Q_0 = \frac{1}{2}$
 ☐ d. $Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

À partir de la forme canonique de l'équation différentielle, on obtient l'équation caractéristique : $x^2 + \frac{\omega_0}{Q_0}x + \omega_0^2 = 0$. Suivant que les solutions de cette équation sont réelles ou complexes la réponse du circuit change de forme.

Ceci dépend du signe du discriminant $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q_0}\right)^2 - 4\omega_0^2$.

Le changement de signe de Δ a lieu pour $Q_0 = \frac{1}{2}$.

- 10** Soit $Q_0 = 0,25$. Calculer les racines de l'équation caractéristique et en déduire la forme de $u(t)$ (α et β sont des constantes).

☐ a. $u(t) = \alpha e^{\omega_0(2+\sqrt{3})t} + \beta e^{\omega_0(2-\sqrt{3})t}$
 ☐ b. $u(t) = E + \alpha e^{\omega_0(2+\sqrt{3})t} + \beta e^{\omega_0(2-\sqrt{3})t}$
☐ c. $u(t) = \alpha e^{-\omega_0(2+\sqrt{3})t} + \beta e^{-\omega_0(2-\sqrt{3})t}$
 ☒ d. $u(t) = E + \alpha e^{-\omega_0(2+\sqrt{3})t} + \beta e^{-\omega_0(2-\sqrt{3})t}$

Pour cette valeur de Q_0 , $\Delta = (4\omega_0)^2 - 4\omega_0^2 = 12\omega_0^2 > 0$, donc les racines sont réelles. Elles ont pour valeurs $x_1 = \omega_0(-2 - \sqrt{3})$ et $x_2 = \omega_0(-2 + \sqrt{3})$.

La solution générale de l'équation différentielle est alors $u(t) = E + \alpha e^{x_1 t} + \beta e^{x_2 t}$. Là encore, ne pas oublier la solution particulière de l'équation différentielle.

- 11** Soit $Q_0 = 0,25$. En tenant compte des conditions initiales, déterminer α et β .

☒ a. $\alpha = E\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right)$
 ☐ b. $\alpha = E\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)$
☒ c. $\beta = -E\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)$
 ☐ d. $\beta = E\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)$

Les conditions initiales sont, puisque le condensateur est déchargé au départ et que le courant est nul, $u(0) = 0$ et $i(0) = 0$. Ces deux grandeurs sont continues puisqu'il s'agit de la tension aux bornes du condensateur et de l'intensité dans la bobine. La solution étant de la forme $u(t) = E + \alpha e^{-\omega_0(2+\sqrt{3})t} + \beta e^{-\omega_0(2-\sqrt{3})t}$ on obtient $u(0) = 0 = E + \alpha + \beta$ et après dérivation $i(0) = 0 = C\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0} = C(\alpha x_1 + \beta x_2)$.

La deuxième relation revient à : $\alpha(-2 - \sqrt{3}) + \beta(-2 + \sqrt{3}) = 0$
ou encore $2E + \sqrt{3}(\beta - \alpha) = 0$.

Le système à résoudre est donc :
$$\begin{cases} \alpha + \beta = -E \\ \alpha - \beta = \frac{2E}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

dont la solution est
$$\begin{cases} \alpha = E \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \right) \\ \beta = -E \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \right) \end{cases}$$

On peut vérifier en reportant ces résultats dans $u(t)$ et $i(t)$ que l'on retrouve bien les conditions initiales.

12 Soit $Q_0 = 0,5$. Sous quelle forme faut-il chercher $u(t)$?

- ☐ a. $u(t) = \alpha + \beta te^{-\omega_0 t}$ ☐ b. $u(t) = \alpha + \beta te^{\omega_0 t}$
☒ c. $u(t) = E + (\alpha + \beta t) e^{-\omega_0 t}$ ☐ d. $u(t) = E + (\alpha + \beta t) e^{\omega_0 t}$

Dans le cas où le discriminant de l'équation caractéristique est nul, il y a une seule racine $x_0 = -\frac{\omega_0}{2Q_0} = -\omega_0$ et la solution de l'équation homogène prend la forme

$$u_H(t) = (\alpha + \beta t) \exp(x_0 t) = (\alpha + \beta t) \exp(-\omega_0 t).$$

On peut facilement vérifier que cette expression satisfait à l'équation différentielle homogène pour $Q_0 = 0,5$.

En ajoutant la solution particulière constante, $u(t) = E + (\alpha + \beta t) e^{-\omega_0 t}$.

13 Soit $Q_0 = 0,5$. En tenant compte des conditions initiales, déterminer $u(t)$.

- ☐ a. $u(t) = E(e^{-\omega_0 t} - 1) - \omega_0 t E e^{-\omega_0 t}$ ☒ b. $u(t) = E(1 - e^{-\omega_0 t}) - \omega_0 t E e^{-\omega_0 t}$
☐ c. $u(t) = E(1 - \omega_0 t e^{-\omega_0 t})$ ☐ d. $u(t) = E(1 + \omega_0 t e^{-\omega_0 t})$

Les conditions initiales sont toujours les mêmes. Elles conduisent au système :

$$\begin{cases} u(t) = 0 = E + \alpha \\ i(t) = 0 = C \left(\frac{du}{dt} \right)_{t=0} = C(\beta - \omega_0 \alpha) \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \alpha = -E \\ \beta = \omega_0 \alpha = -E\omega_0 \end{cases}$$

14 Soit $Q_0 = 1$. Calculer les racines de l'équation caractéristique et en déduire la forme de $u(t)$ (α et φ sont des constantes).

- ☐ a. $u(t) = \alpha e^{\frac{-\omega_0 t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\omega_0 t}{2} + \varphi\right)$ ☐ b. $u(t) = \alpha e^{\frac{\omega_0 t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\omega_0 t}{2} + \varphi\right)$
☒ c. $u(t) = E + \alpha e^{\frac{-\omega_0 t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\omega_0 t}{2} + \varphi\right)$ ☐ d. $u(t) = E + \alpha e^{\frac{\omega_0 t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\omega_0 t}{2} + \varphi\right)$

Dans ce cas le discriminant est négatif : $\Delta = \omega_0^2 - 4\omega_0^2 = -3\omega_0^2 < 0$, donc les racines sont complexes. Elles ont pour valeurs $x_1 = \frac{\omega_0}{2}(-1 + j\sqrt{3})$ et $x_2 = \frac{\omega_0}{2}(-1 - j\sqrt{3})$.

La solution $u_H(t)$ de l'équation homogène se met alors sous la forme

$$u_H(t) = \alpha \exp\left(\frac{-\omega_0 t}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2} + \varphi\right)$$

et on lui ajoute la solution particulière constante $u_P = E$.

15 Soit $Q_0 = 1$. En tenant compte des conditions initiales, déterminer α et φ .

☐ a. $\varphi = \frac{\pi}{2}$

☒ b. $\varphi = \frac{5\pi}{6}$

☒ c. $\alpha = \frac{2E}{\sqrt{3}}$

☐ d. $\alpha = \frac{E}{\sqrt{2}}$

D'après les conditions initiales,

$$\begin{cases} u(t) = 0 = u(t) = E + \alpha \cos(\varphi) \\ i(t) = 0 = C \left(\frac{du}{dt} \right)_{t=0} = C \alpha \left[\left(\frac{-\omega_0}{2} \right) \cos(\varphi) - \frac{\sqrt{3}\omega_0}{2} \sin(\varphi) \right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \cos(\varphi) = -E \\ \alpha \sin(\varphi) = \frac{E}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

On choisit de prendre α positif, alors $\alpha = E \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2E}{\sqrt{3}}$ (en élevant les deux expressions au carré et en les sommant).

Enfin en remplaçant α par sa valeur : $\begin{cases} \cos(\varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\varphi) = \frac{1}{2} \end{cases}$ donc $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ à 2π près.

Un conseil : dans tous les cas, penser à vérifier à la fin du calcul que les solutions obtenues vérifient bien les conditions initiales.

6 Circuits linéaires en régime sinusoïdal

VRAI/FAUX

1 Valeurs efficaces

☒ V ☐ F a. La valeur efficace complexe associée à la somme de deux tensions sinusoïdales de même pulsation est égale à la somme des valeurs efficaces complexes de chaque tension.

Soient deux tensions sinusoïdales $u_1(t)$ et $u_2(t)$:

$u_1(t) = U_1 \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_1)$ est la partie réelle de $\underline{u_1(t)} = U_1 \sqrt{2} e^{j(\omega t + \varphi_1)} = \underline{U_1} \sqrt{2} e^{j\omega t}$ en posant $\underline{U_1} = U_1 e^{j\varphi_1}$ la tension efficace complexe associée à $u_1(t)$.

De même, $u_2(t) = U_2 \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_2)$ est la partie réelle de $\underline{u_2(t)} = \underline{U_2} \sqrt{2} e^{j\omega t}$ en posant $\underline{U_2} = U_2 e^{j\varphi_2}$.

Leur somme $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ est la partie réelle de $\underline{u_1(t)} + \underline{u_2(t)}$ que l'on peut mettre sous la forme $\underline{U_1} \sqrt{2} e^{j\omega t} + \underline{U_2} \sqrt{2} e^{j\omega t} = (\underline{U_1} + \underline{U_2}) \sqrt{2} e^{j\omega t}$ donc $\underline{U} = \underline{U_1} + \underline{U_2}$.

☐ V ☒ F **b.** La valeur efficace réelle associée à la somme de deux tensions sinusoïdales de même pulsation est égale à la somme des valeurs efficaces réelles de chaque tension.

La tension efficace réelle étant le module de la tension efficace complexe, $U = |\underline{U}| = |\underline{U_1} + \underline{U_2}|$ n'est pas la somme des modules de $\underline{U_1}$ et $\underline{U_2}$ (sauf cas particulier où $u_1(t)$ et $u_2(t)$ seraient en phase).

2 Impédances

☒ V ☐ F **a.** L'impédance complexe d'un circuit (R, L, C) série est égale à $\underline{Z} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$

Les impédances en série s'ajoutent donc l'impédance complexe de l'association série résistance-inductance-condensateur est égale à $\underline{Z} = \underline{Z_R} + \underline{Z_L} + \underline{Z_C}$ avec $\underline{Z_R} = R$, $\underline{Z_L} = jL\omega$ et $\underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega}$.

☐ V ☒ F **b.** L'impédance complexe d'un circuit (R, L, C) parallèle est égale à $\underline{Z} = \frac{1}{R} + j \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)$

Les admittances en parallèles s'ajoutent donc l'admittance complexe de l'association parallèle résistance-inductance-condensateur est égale à $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \underline{Y_R} + \underline{Y_L} + \underline{Y_C}$ donc $\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)}$. La formule proposée est celle de l'admittance et pas de l'impédance.

3 Circuits linéaires

☒ V ☐ F Les lois et théorèmes en régime sinusoïdal sont les mêmes qu'en régime permanent à condition de remplacer les résistances par les impédances complexes, et les intensités et tensions réelles par les intensités et tensions complexes.

C'est justement l'intérêt de l'utilisation des complexes en régime sinusoïdal forcé : on retrouve ainsi formellement toutes les méthodes vues en régime permanent.

4 ☒ V ☐ F Soit un dipôle soumis à une tension sinusoïdale $u(t) = U \sqrt{2} \cos \omega t$ et traversé par un courant d'intensité $i(t) = I \sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi)$ (convention récepteur).

L'énergie reçue par ce dipôle au cours d'une période est $W_T = \frac{2\pi}{\omega} UI \cos \varphi$.

La puissance instantanée reçue par le dipôle est $P(t) = u(t)i(t)$. Il apparaît dans l'expression un produit de cosinus que l'on linéarise : $P(t) = u(t)i(t) = UI (\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi)$.

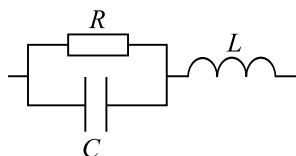
L'énergie reçue au cours d'une période est

$$W_T = \int_0^T P(t) dt = UI \int_0^T (\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi) dt = UIT \cos \varphi = \frac{2\pi UI \cos \varphi}{\omega} \text{ (le premier}$$

terme en cosinus est de période $\frac{T}{2}$ et donne une intégrale nulle sur un intervalle égal à deux fois sa période). On retrouve que la puissance moyenne $\langle P \rangle = \frac{W}{T}$ est égale à $UI \cos \varphi$.

QCM

- 5** Soit le dipôle d'impédance complexe $\underline{Z}$ constitué d'une résistance R , d'un condensateur C , et d'une bobine d'inductance L , de résistance négligeable.



Déterminer l'expression de $\underline{Z}$.

- ☐ a. $\underline{Z} = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$ ☐ b. $\underline{Z} = \frac{jR(LC\omega^2 - 1)}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$
- ☐ c. $\underline{Z} = \frac{R(1 + jRC\omega)}{1 + (RC\omega)^2} + jL\omega$ ☒ d. $\underline{Z} = \frac{R}{1 + jRC\omega} + jL\omega$

Les impédances complexes en série s'ajoutent : on a donc $\underline{Z} = \underline{Z}_L + \underline{Z}_1 = jL\omega + \underline{Z}_1$ en notant $\underline{Z}_1$ l'impédance du groupement parallèle condensateur-résistance.

Or les admittances complexes en parallèle s'ajoutent donc

$$\frac{1}{\underline{Z}_1} = \underline{Y}_1 = \underline{Y}_R + \underline{Y}_C = \frac{1}{R} + jC\omega = \frac{1 + jRC\omega}{R}.$$

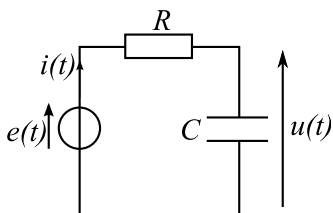
Finalement, $\underline{Z} = \frac{R}{1 + jRC\omega} + jL\omega$.

- 6** Soit le dipôle de la question 5 constitué d'une résistance R , d'un condensateur C , et d'une bobine d'inductance L , de résistance négligeable. À quelle condition le déphasage est-il nul entre l'intensité qui le traverse et la tension à ses bornes ?

- ☐ a. $L = \frac{1}{C\omega^2}$ ☒ b. $L = \frac{R^2 C}{1 + (RC\omega)^2}$
- ☐ c. $L = \frac{R}{\omega(1 + (RC\omega)^2)}$ ☐ d. $L = \frac{1 + (RC\omega)^2}{C\omega^2}$

Soit $u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ et $i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t)$. La tension efficace complexe et l'intensité efficace complexe sont liées par la relation $\underline{U} = \underline{Z}I$ avec $\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$. Pour que le déphasage soit nul il faut que $\underline{Z}$ soit réelle donc en utilisant le résultat précédent, $\underline{Z} = \frac{R(1 - jRC\omega)}{1 + (RC\omega)^2} + jL\omega$. Il faut que $\frac{R^2C\omega}{1 + (RC\omega)^2} = L\omega$ donc $L = \frac{R^2C}{1 + (RC\omega)^2}$. Alors $\underline{Z} = \frac{R}{1 + (RC\omega)^2}$: l'impédance est réelle et positive, le courant et la tension sont en phase.

- 7** Un circuit série comporte une source de tension sinusoïdale $e(t) = E\sqrt{2}\cos\omega t$, une résistance R et un condensateur C .



Déterminer la valeur efficace du courant $i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ circulant dans le circuit.

- ☒ a. $I = \frac{EC\omega}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$ ☐ b. $I = \frac{E}{R} \sqrt{1 + (RC\omega)^2}$
☐ c. $I = \frac{EC\omega}{1 + (RC\omega)^2}$ ☐ d. $I = \frac{E}{R} (1 + (RC\omega)^2)$

L'impédance complexe de l'association série résistance-condensateur est égale à

$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_C = R + \frac{1}{jC\omega}$. L'intensité efficace complexe $\underline{I} = Ie^{j\varphi}$ est liée à la tension efficace complexe $\underline{E} = E$ par la relation $\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{E}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jC\omega E}{jC\omega R + 1}$. L'intensité efficace réelle est le module de cette expression donc $I = |\underline{I}| = \frac{C\omega E}{\sqrt{(C\omega R)^2 + 1}}$.

- 8** Un circuit série comporte une source de tension sinusoïdale $e(t) = E\sqrt{2}\cos\omega t$, une résistance R et un condensateur C . Soit φ le déphasage du courant $i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ par rapport à la source de tension.

- ☐ a. $\tan\varphi = -RC\omega$ ☒ b. $\tan\varphi = \frac{1}{RC\omega}$
☒ c. $i(t)$ est en avance sur $e(t)$ ☐ d. $e(t)$ est en avance sur $i(t)$

$\underline{I} = Ie^{j\varphi} = \frac{\underline{E}}{R + \frac{1}{jC\omega}}$ que l'on peut aussi écrire $\underline{I} = \frac{I}{e^{-j\varphi}} = \frac{\underline{E}}{R - \frac{j}{C\omega}}$ donc $\frac{e^{-j\varphi}}{I} = \frac{R - \frac{j}{C\omega}}{E}$
 donc en séparant partie réelle et partie imaginaire on arrive à $\cos\varphi = \frac{RI}{E}$ et $\sin\varphi = \frac{I}{C\omega E}$
 soit $\tan\varphi = \frac{1}{RC\omega}$.

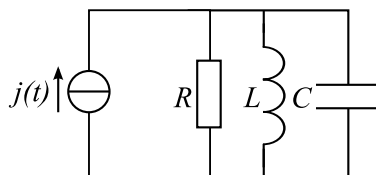
Dans l'expression $i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$, φ représente l'avance de phase de $i(t)$ sur $e(t)$. Comme $\cos \varphi > 0$ et $\sin \varphi > 0$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Le courant est donc réellement en avance sur la tension.

- 9** Un circuit série comporte une source de tension sinusoïdale $e(t) = E\sqrt{2}\cos \omega t$, une résistance R et un condensateur C . Déterminer la puissance moyenne $\langle P \rangle$ fournie par la source de tension au reste du circuit.

☐ a. $\langle P \rangle = \frac{(E)^2}{C\omega R^2(1 + (RC\omega)^2)}$
☐ b. $\langle P \rangle = \frac{E^2}{R(1 + (RC\omega)^2)}$
☐ c. $\langle P \rangle = \frac{C\omega E^2}{1 + (RC\omega)^2}$
☒ d. $\langle P \rangle = \frac{R(C\omega E)^2}{1 + (RC\omega)^2}$

La puissance moyenne consommée dans l'impédance équivalente au circuit est de la forme $\langle P \rangle = EI \cos \varphi = \operatorname{Re}(\underline{Z})I^2$. En effet $\underline{Z} = \frac{E}{I} = \frac{E}{Ie^{j\varphi}} = \frac{E}{I}e^{-j\varphi} = \frac{E}{I}(\cos \varphi - j \sin \varphi)$ donc $\operatorname{Re}(\underline{Z}) = \frac{E}{I} \cos \varphi$. Ici $\operatorname{Re}(\underline{Z}) = R$ et $I^2 = \frac{(C\omega E)^2}{(C\omega R)^2 + 1}$. En remplaçant dans $\langle P \rangle = \operatorname{Re}(\underline{Z})I^2$ on obtient $\langle P \rangle = \frac{R(C\omega E)^2}{1 + (RC\omega)^2}$.

- 10** Un circuit parallèle comporte une source de courant sinusoïdale $j(t) = J\sqrt{2}\cos \omega t$, une résistance R , un condensateur C , une bobine d'inductance L et de résistance négligeable.



Déterminer la valeur efficace de la tension $u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ aux bornes du circuit.

☐ a. $U = J\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}$
☐ b. $U = J\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$
☐ c. $U = \frac{J}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$
☒ d. $U = \frac{J}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}}$

Les dipôles sont en parallèle, leurs admittances complexes s'ajoutent donc $\underline{Y} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_L + \underline{Y}_C = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega = \frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$. La tension efficace complexe est égale à $\underline{U} = \underline{Z}J = \frac{J}{\underline{Y}} = \frac{J}{\frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}$ et la tension efficace réelle est le module de $\underline{U}$.

- 11** On reprend le circuit de la question 10. Soit φ le déphasage de la tension $u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ par rapport à la source de courant $LC\omega^2 > 1$.

- ☒ a. $\tan \varphi = \frac{R}{L\omega} - RC\omega$ ☐ b. $\tan \varphi = \frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}$
☐ c. $u(t)$ est en avance sur $j(t)$ ☒ d. $j(t)$ est en avance sur $u(t)$

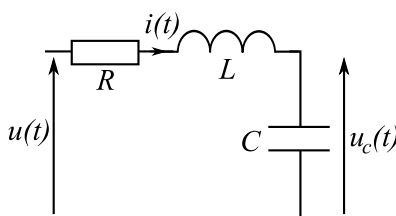
À partir du résultat de la question 10, $\underline{U} = Ue^{j\varphi} = \frac{U}{e^{-j\varphi}} \frac{J}{\frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}$ donc

$$e^{-j\varphi} = \frac{U}{J} \left[\frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right) \right].$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire, $\begin{cases} \cos \varphi = \frac{U}{RJ} > 0 \\ \sin \varphi = -\frac{U}{J} \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) \end{cases}$

donc $\tan \varphi = -R\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$. Comme $\cos \varphi > 0$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$; si $LC\omega^2 > 1$, $\tan \varphi < 0$ donc $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0$ alors que φ représente l'avance de $u(t)$ sur $j(t)$. On en conclut que $j(t)$ est en avance sur $u(t)$ si $LC\omega^2 > 1$.

- 12** Soit un circuit (R, L, C) série soumis à une différence de potentiel sinusoïdale $u(t) = U\sqrt{2}\cos \omega t$ de pulsation réglable.



- ☐ a. Il y a une résonance d'intensité si la résistance est suffisamment petite.
☐ b. Il y a une résonance d'intensité si la résistance est suffisamment grande.
☒ c. Il y a une résonance d'intensité quelle que soit la valeur de la résistance.
☒ d. Il y a une résonance d'intensité pour la pulsation $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

L'impédance complexe de l'association série résistance-inductance-condensateur est égale à $\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$.

L'intensité efficace complexe est $\underline{I} = \frac{U}{\underline{Z}} = \frac{U}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$ et l'intensité efficace réelle

est donnée par $I = |\underline{I}| = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$. On parle de résonance si l'intensité passe

par un maximum pour une valeur particulière de la pulsation. Or ici l'expression sous la racine est la somme de deux termes positifs, le premier indépendant de ω , le deuxième s'annulant pour $L\omega = \frac{1}{C\omega}$. Le dénominateur prend alors sa valeur minimale et l'intensité efficace est maximale, il y a donc résonance pour $\omega^2 = \frac{1}{LC}$. La valeur de l'intensité à la résonance est $I_{\max} = \frac{U}{R}$. Il n'y a pas de condition sur la résistance pour observer cette résonance.

13 Soit un circuit (R, L, C) série soumis à une différence de potentiel sinusoïdale $u(t) = U\sqrt{2}\cos\omega t$ de pulsation réglable. Si L et C sont fixées et que l'on fait varier R :

☐ a. La résonance d'intensité est d'autant plus aiguë que R est grande.

☒ b. La résonance d'intensité est d'autant plus aiguë que R est petite.

☒ c. La largeur de bande passante est donnée par $\Delta\omega = \frac{R}{L}$.

☐ d. La largeur de bande passante est donnée par $\Delta\omega = \frac{1}{RC}$.

La bande passante correspond à l'intervalle $[\omega_1, \omega_2]$ des pulsations telles que l'intensité soit au moins égale à la valeur maximale divisée par $\sqrt{2}$. En appliquant cette définition,

on obtient l'équation $\sqrt{2}R = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$ pour les deux pulsations limites ω_1 et

ω_2 appelées pulsations de coupure. ω_1 et ω_2 vérifient donc la relation $R^2 = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$

donc $R = \pm\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$. Cette expression revient à écrire deux équations du second degré sur ω : $LC\omega^2 + RC\omega - 1 = 0$ et $LC\omega^2 - RC\omega - 1 = 0$. Ces deux équations admettent chacune une racine positive et une racine négative et elles ont le même discriminant égal à $\Delta = (RC)^2 + 4LC$. Seules les racines positives ont une signification physique.

On obtient donc $\omega_1 = \frac{-RC + \sqrt{\Delta}}{2LC}$ et $\omega_2 = \frac{RC + \sqrt{\Delta}}{2LC}$. La largeur de bande passante vaut $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$.

On dit que la résonance est aiguë si la bande passante est étroite, il faut donc que $\Delta\omega$ soit petite : la résistance doit être faible.

14 Soit un circuit (R, L, C) série soumis à une différence de potentiel sinusoïdale $u(t) = U\sqrt{2}\cos\omega t$ de pulsation réglable.

☒ **a.** Il y a une résonance de charge si la résistance est suffisamment petite.

☐ **b.** Il y a une résonance de charge si la résistance est suffisamment grande.

☒ **c.** Il y a une résonance de charge pour la pulsation $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$.

☐ **d.** Il y a une résonance de charge pour la pulsation $\omega = \sqrt{\frac{R^2}{2L^2} - \frac{1}{LC}}$.

La charge du condensateur est proportionnelle à la tension u_C à ses bornes ; or $\frac{U_C}{U} = \frac{Z_C I}{U} = \frac{U}{jC\omega \left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right]} = \frac{U}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$ et la valeur efficace correspondante est $\left| \frac{U_C}{U} \right| = \frac{U}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}$. Pour déterminer s'il y a résonance, il faut

étudier le dénominateur. Soit $f(\omega) = (1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2$.

En dérivant :

$$f'(\omega) = -4LC\omega(1 - LC\omega^2) + 2\omega(RC)^2 = 2\omega((RC)^2 - 2LC(1 - LC\omega^2)).$$

La dérivée s'annule pour $\omega = 0$ et pour $LC\omega^2 = 1 - \frac{R^2C}{2L}$. La deuxième possibilité n'existe

que si $R < \sqrt{\frac{2L}{C}}$.

Donc soit $R > \sqrt{\frac{2L}{C}}$: $f'(\omega) \geq 0$, le dénominateur est une fonction croissante de ω et U_C une fonction décroissante de ω : il n'y a pas de résonance.

Soit $R < \sqrt{\frac{2L}{C}}$: $f'(\omega) < 0$ pour $LC\omega^2 < 1 - \frac{R^2C}{2L}$ et $f'(\omega) > 0$ pour $LC\omega^2 > 1 - \frac{R^2C}{2L}$.

Le dénominateur passe par un minimum pour $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$ et U_C est maximale pour cette valeur de ω . Il y a alors résonance de charge.

15 Soit un circuit (R, L, C) série soumis à une différence de potentiel sinusoïdale $u(t) = U\sqrt{2}\cos\omega t$ de pulsation réglable.

☐ **a.** Il y a une résonance de puissance si la résistance est suffisamment petite.

☐ **b.** Il y a une résonance de puissance si la résistance est suffisamment grande.

☒ **c.** Il y a une résonance de puissance pour la pulsation $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

☐ **d.** Il n'y a pas de phénomène de résonance de puissance.

La puissance moyenne reçue par le dipôle est $\langle P \rangle = \operatorname{Re}(\underline{Z})I^2$ (voir question 9) avec $\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$ donc $\langle P \rangle = RI^2$.

La résistance ne dépendant pas de la pulsation, la puissance est maximale quand l'intensité est maximale : la résonance de puissance coïncide donc avec la résonance d'intensité et comme elle, a lieu pour $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ quelle que soit la valeur de la résistance.

7 Quadripôles 1

VRAI/FAUX

1 Impédances d'entrée et de sortie

☐ V ☒ F a. L'impédance d'entrée d'un quadripôle dépend du générateur branché à l'entrée.

L'impédance d'entrée est le rapport $\underline{Z}_e = \frac{U_e}{I_e}$; cette grandeur représente le comportement du circuit vu par le générateur d'entrée, et ne dépend pas du générateur d'entrée, mais du quadripôle ainsi de ce qui est branché côté sortie.

☐ V ☒ F b. L'impédance de sortie d'un quadripôle dépend du dipôle branché côté sortie.

L'impédance de sortie est l'impédance interne du générateur équivalent à l'ensemble quadripôle + générateur d'entrée ; cette grandeur représente le comportement du circuit vu par l'utilisateur, et ne dépend pas de ce qui est branché côté sortie, mais du quadripôle ainsi que du générateur d'entrée.

2 Fonction de transfert

☐ V ☒ F a. La fonction de transfert d'un quadripôle ne dépend que de la structure du quadripôle.

Elle dépend également de ce qui est branché côté sortie : ce n'est pas une caractéristique intrinsèque du quadripôle.

☐ V ☒ F b. Une chaîne de quadripôle a pour fonction de transfert le produit des fonctions de transfert de chaque quadripôle pris individuellement.

Si plusieurs quadripôles sont branchés à la suite les uns des autres, il y a bien une factorisation des fonctions de transfert successives ($\underline{H} = \underline{H}_1 * \underline{H}_2 * \underline{H}_3 \dots$), mais pour le i^{e} quadripôle Q_i , $\underline{H}_i$ dépend de Q_i , $Q_{i+1} \dots$ et du circuit d'utilisation.

3 Diagramme de Bode

☐ V ☒ F a. Le gain en décibels d'un quadripôle est défini par $G_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{U_s}{U_e} \right)$ où U_e est la valeur efficace de la tension d'entrée et U_s la valeur efficace de la tension de sortie.

Le gain en décibels défini à partir des tensions est $G_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{U_s}{U_e} \right)$. Le gain en décibels pour les puissances, lui, est de la forme $G_{PdB} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_s}{P_e} \right)$. Le facteur 20 s'explique par le fait que la puissance est reliée au carré de la tension efficace.

☒ V ☐ F b. L'argument de la fonction de transfert représente le déphasage entre l'entrée et la sortie.

Soit $u_e(t) = U_e \sqrt{2} \cos \omega t$ et $u_s(t) = U_s \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$, où φ est le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée. Alors la fonction de transfert est : $\underline{H} = \frac{U_s}{U_e} e^{j\varphi} = \frac{U_s e^{j\varphi}}{U_e}$. D'après cette relation, φ est l'argument de $\underline{H}$.

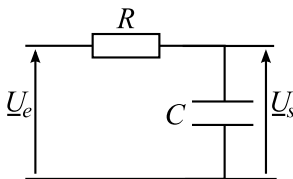
4 Bande passante :

☒ V ☐ F La bande passante à -3 dB est identique à la bande passante définie par le critère $|\underline{H}| \geq \frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}}$.

En effet, $|\underline{H}| \geq \frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}}$ correspond à $20 \log_{10} (|\underline{H}|) \geq 20 \log_{10} (|\underline{H}|_{\max}) - 10 \log_{10} (2)$ et comme $\log_{10} (2) \approx 0,3$ l'inégalité revient à $G_{dB} \geq G_{dB\max} - 3$.

QCM

5 Calculer la fonction de transfert du circuit (supposé non chargé) :



☒ a. $\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$

☐ b. $\underline{H} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$

☐ c. La pulsation de coupure à -3 dB est $\omega_c = RC$.

☒ d. La pulsation de coupure à -3 dB est $\omega_c = \frac{1}{RC}$.

Le courant de sortie étant nul, les deux dipôles sont en série et on peut utiliser un diviseur de tension : $\frac{U_s}{U_e} = \frac{Z_C}{R + Z_C} = \frac{1}{R Y_C + 1}$ en multipliant le numérateur et le dénominateur par $\underline{Y}_C$. Donc $\underline{H} = \frac{U_s}{U_e} = \frac{1}{jRC\omega + 1}$.

Le gain en décibels vaut $G_{dB} = |H| = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \right)$.

Sa valeur maximale est

$$G_{dB\max} = 0 \text{ pour } \omega = 0 \text{ et, pour } \omega = \frac{1}{RC}, G_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{1+1}} \right) = -10 \log_{10}(2) = -3.$$

6 Soit le circuit de la question 5. Le tracé du diagramme de Bode pour le gain G_{dB} comporte :

- ☐ a. Une asymptote horizontale et une asymptote de pente 20 dB/dec.
- ☒ b. Une asymptote horizontale et une asymptote de pente -20 dB/dec.
- ☐ c. Une asymptote de pente -20 dB/dec et une asymptote de pente 20 dB/dec.
- ☐ d. Deux asymptotes horizontales.

Si $\omega \ll \frac{1}{RC}$, $G_{dB} \approx 0$ (asymptote horizontale) et si $\omega \gg \frac{1}{RC}$, $G_{dB} \approx 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{(RC\omega)^2}} \right)$

donc $G_{dB} \approx -10 \log_{10} (RC\omega)^2 = 20 \log_{10} \omega_c - 20 \log_{10} \omega$ qui est l'équation d'une droite puisque l'abscisse en coordonnées logarithmiques est $X = \log_{10} \omega$. Le gain en décibel chute de 20 dB à chaque fois que la pulsation (ou la fréquence) est multipliée par 10, ce qui est la définition d'une décade, d'où l'unité « dB/dec ». Ce circuit, qui laisse passer les basses fréquences (pour $\omega = 0$, $|H| = 1$) et pas les hautes fréquences, est un circuit passe-bas.

7 Si on pose $u_e(t) = U_e \sqrt{2} \cos \omega t$ et $u_s(t) = U_s \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$, le déphasage φ vérifie :

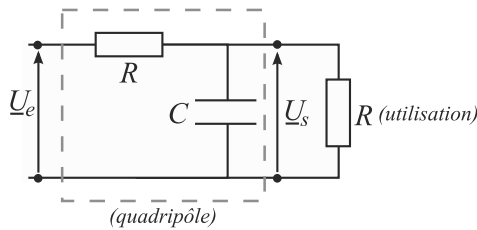
- ☐ a. $\tan \varphi = \frac{1}{RC\omega}$
- ☒ b. $\tan \varphi = -RC\omega$
- ☒ c. La sortie est en retard sur l'entrée.
- ☐ d. La sortie est en avance sur l'entrée.

Avec les conventions choisies, $\underline{H} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{U_s}{U_e e^{-j\varphi}} = \frac{U_s}{U_e (\cos \varphi - j \sin \varphi)} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$
donc en séparant partie réelle et partie imaginaire on obtient $-\tan \varphi = RC\omega$.

Compte tenu de $0 < \cos \varphi$ et $\sin \varphi \leq 0$, $\frac{-\pi}{2} \leq \varphi \leq 0$ donc la sortie est en retard sur l'entrée.

8 On branche en sortie du quadripôle de la question 5 une résistance R identique à la première. La tension d'entrée $u_e(t)$ est délivrée par un générateur de Thévenin non représenté, de force électromotrice $e(t) = E \sqrt{2} \cos \omega t$ et de résistance interne r_g . Déterminer l'impédance d'entrée $\underline{Z}_e$ et l'impédance de sortie $\underline{Z}_s$.

- ☒ a. $\underline{Z}_e = R \left(\frac{2 + jRC\omega}{1 + jRC\omega} \right)$
- ☐ b. $\underline{Z}_e = r_g + 2R + \frac{1}{jC\omega}$
- ☐ c. $\underline{Z}_s = r_g + R + \frac{1}{jC\omega}$
- ☒ d. $\underline{Z}_s = \frac{r_g + R}{1 + jC\omega(r_g + R)}$



Vu du générateur, le circuit est formé d'une résistance R en série avec l'association parallèle (condensateur, résistance) soit $\underline{Z}_e = R + \frac{1}{\underline{Y}_C + \underline{Y}_R}$ donc

$$\underline{Z}_e = R + \frac{R}{\underline{Y}_C R + 1} = R + \frac{R}{1 + jRC\omega} = R \left(\frac{2 + jRC\omega}{1 + jRC\omega} \right).$$

Vu de l'utilisation, et si on transforme le circuit côté générateur, le condensateur et la résistance série totale ($r_g + R$) sont en parallèle donc

$$\underline{Y}_s = \frac{1}{r_g + R} + jC\omega = \frac{1}{\underline{Z}_s}.$$

9 Calculer la fonction de transfert du circuit précédent et déterminer si :

- ☐ a. l'amplification statique en tension est égale à 2.
- ☒ b. l'amplification statique en tension est égale à $\frac{1}{2}$.
- ☐ c. la pulsation de coupure à -3 dB est $\omega'_c = \frac{1}{RC}$
- ☒ d. la pulsation de coupure à -3 dB est $\omega'_c = \frac{2}{RC}$

Posons $\underline{Y}_1 = \frac{1}{R} + jC\omega$ l'admittance de l'association parallèle (résistance, condensateur) côté sortie. On remarque alors un diviseur de tension entre $\underline{Z}_1 = \frac{1}{\underline{Y}_1}$ et R donc on peut écrire la nouvelle fonction de transfert sous la forme

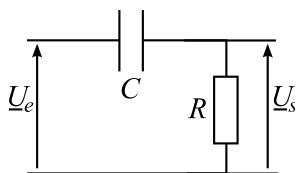
$$\underline{H}' = \frac{\underline{Z}_1}{R + \underline{Z}_1} = \frac{1}{R\underline{Y}_1 + 1} = \frac{1}{R \left(\frac{1}{R} + jC\omega \right) + 1} = \frac{1}{2 + jRC\omega}.$$

Le gain statique s'obtient en faisant tendre ω vers 0 : alors $H'_0 = \frac{1}{2}$, ce qu'on peut calculer directement en faisant apparaître un pont diviseur de tension en très basse fréquence, où le condensateur est équivalent à un coupe-circuit. Le circuit se ramène alors à deux résistances identiques en série.

En mettant la fonction de transfert sous forme canonique, $\underline{H}' = \frac{H'_0}{1 + j\frac{RC\omega}{2}}$.

La pulsation de coupure est alors au dénominateur de ω donc $\omega'_c = \frac{2}{RC}$.

10 Calculer la fonction de transfert du circuit (supposé non chargé) :



☐ a. $\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$

☒ b. $\underline{H} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$

☒ c. $\omega_c = \frac{1}{RC}$ est la pulsation de coupure basse à -3 dB.

☐ d. $\omega_c = \frac{1}{RC}$ est la pulsation de coupure haute à -3 dB.

Le courant de sortie étant nul, les deux dipôles sont en série et on peut utiliser un diviseur de tension : $\frac{U_s}{U_e} = \frac{R}{R + \underline{Z}_C} = \frac{RY_C}{RY_C + 1}$ en multipliant le numérateur et le dénominateur par Y_C . Donc $\underline{H} = \frac{U_s}{U_e} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$.

Le gain en décibel vaut

$$G_{dB} = |\underline{H}| = 20 \log_{10} \left(\frac{RC\omega}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \right) = -20 \log_{10} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{(RC\omega)^2}} \right).$$

Sa valeur maximale est $G_{dB \max} = 0$ si ω tend vers l'infini et, pour $\omega = \frac{1}{RC}$, $G_{dB} = -20 \log_{10}(\sqrt{1+1}) = -10 \log_{10}(2) = -3$. En dessous de $\omega_c = \frac{1}{RC}$, le gain est plus petit que $G_{dB \max} - 3$, il s'agit alors d'une pulsation de coupure basse pour ce circuit qui est un passe-haut (contrairement au circuit passe-bas pour lequel $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ est la pulsation de coupure haute).

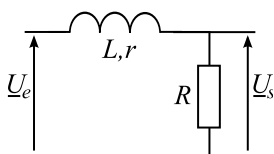
11 Soit le circuit de la question 10. Le tracé du diagramme de Bode pour le gain G_{dB} comporte :

- ☒ a. Une asymptote horizontale et une asymptote de pente 20 dB/dec.
- ☐ b. Une asymptote horizontale et une asymptote de pente -20 dB/dec.
- ☐ c. Une asymptote de pente -20 dB/dec et une asymptote de pente 20 dB/dec.
- ☐ d. Une asymptote horizontale et une asymptote verticale.

Si $\omega \ll \frac{1}{RC}$, $G_{dB} \approx -20 \log_{10} \left(\sqrt{\frac{1}{(RC\omega)^2}} \right) = 20 \log_{10}(RC\omega)$. C'est l'équation d'une droite de pente 20 dB/dec.

Si $\omega \gg \frac{1}{RC}$, $G_{dB} \approx 0$ (asymptote horizontale).

- 12** Soit le quadripôle comportant une bobine réelle modélisable par une inductance pure L en série avec une résistance r et une résistance R . Le circuit est non chargé.



Déterminer l'amplification statique en tension.

- ☐ a. $H_0 = 1$ ☐ b. $H_0 = \frac{R}{r}$
☒ c. $H_0 = \frac{R}{r+R}$ ☐ d. $H_0 = \frac{r}{r+R}$

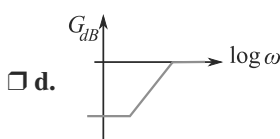
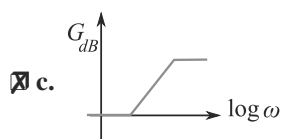
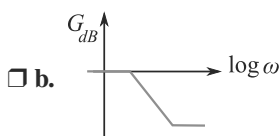
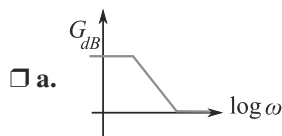
En très basse fréquence, l'inductance pure est équivalente à un court-circuit. Comme il n'y a pas d'utilisation en sortie (circuit non chargé), le circuit se ramène à un diviseur de tension entre deux résistances r et R et $U_s = \frac{R}{r+R} U_e$.

- 13** Déterminer la pulsation de coupure du quadripôle de la question 12.

- ☐ a. $\omega_c = \frac{R}{L}$ ☐ b. $\omega_c = \frac{r}{L}$
☒ c. $\omega_c = \frac{r+R}{L}$ ☐ d. $\omega_c = \frac{rR}{(r+R)L}$

La fonction de transfert complexe obtenue par un diviseur de tension est égale à $\underline{H} = \frac{R}{R + \underline{Z}}$ en notant $\underline{Z} = r + jL\omega$ l'impédance de la bobine réelle. En faisant apparaître le gain statique on obtient $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \frac{jL\omega}{r+R}}$ et par identification avec la forme canonique $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$ on en déduit que $\omega_c = \frac{r+R}{L}$.

- 14** La fonction de transfert d'un quadripôle se met sous la forme : $\underline{H} = \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}$ avec $\omega_2 \gg \omega_1$. Le diagramme de Bode asymptotique pour le gain a l'allure :



On cherche ici l'allure asymptotique de la courbe de gain.

En très basse fréquence $\omega \ll \omega_1 \ll \omega_2$, $\underline{H} \approx 1$ donc $G_{dB} \approx 0$.

Si $\omega_1 \ll \omega_2 \ll \omega$ $\underline{H} \approx \frac{\omega_2}{\omega_1} > 1$ donc $G_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right) > 0$.

Au vu de ces deux comportements limites, la réponse ne peut être que **c**.

Vérifions le cas intermédiaire $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$: alors $\underline{H} \approx j \frac{\omega}{\omega_1}$ et donc

$G_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right) = 20 \log_{10}(\omega) - 20 \log_{10}(\omega_1)$, qui est l'équation d'une droite de pente + 20 dB/dec. Ceci correspond bien à l'allure du **c**.

15 Pour la fonction de transfert de la question **14**, le déphasage entre l'entrée et la sortie est maximal si :

- ☐ a. $\omega = 0$ ☐ b. $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$
☒ c. $\omega = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ ☐ d. ω tend vers l'infini

$\underline{H} = \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_2}}$ est de la forme $\underline{H} = \frac{H_1}{H_2}$ et le déphasage φ entre l'entrée et la sortie est donc

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg(\underline{H}_1) - \arg(\underline{H}_2) = \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right).$$

$$\text{Dérivons par rapport à } \omega : \varphi'(\omega) = \frac{1}{\omega_1 \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right)} - \frac{1}{\omega_2 \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 \right)}.$$

La dérivée s'annule pour $\omega_1 \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right) = \omega_2 \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 \right)$ donc pour $\omega_1 + \frac{\omega^2}{\omega_1} = \omega_2 + \frac{\omega^2}{\omega_2}$

soit $\omega^2 \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right) = \omega_2 - \omega_1$ qui conduit à $\omega = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$.

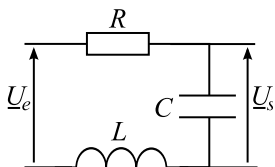
La dérivée est positive pour $\omega_1 \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right) < \omega_2 \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 \right)$ c'est-à-dire

$\omega^2 \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right) < \omega_2 - \omega_1$ donc pour $\omega < \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ étant donné que $0 < \omega_2 - \omega_1$.

Comme $\varphi'(\omega) > 0$ pour $\omega < \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ et $\varphi'(\omega) < 0$ pour $\omega > \sqrt{\omega_1 \omega_2}$, la fonction passe par un maximum pour $\omega = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$.

8 Quadripôles 2

- 1** Calculer la fonction de transfert du circuit (supposé non chargé) :



- ☐ a. $\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$
☒ b. $\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$
- ☐ c. $\underline{H} = \frac{1}{1 - j\frac{R}{L\omega} - \frac{1}{LC\omega^2}}$
☐ d. $\underline{H} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)}$

Les trois éléments sont en série en l'absence de circuit d'utilisation : grâce à un diviseur de tension, on obtient $\underline{U}_s = \frac{\underline{Z}_C}{R + \underline{Z}_C + \underline{Z}_L} \underline{U}_e = \frac{\underline{U}_e}{R\underline{Y}_C + 1 + \underline{Z}_L\underline{Y}_C}$ donc après mise en forme :

$$\underline{H} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}.$$

- 2** Soit le circuit de la question 1. Le tracé du diagramme de Bode pour le gain G_{dB} comporte :

- ☐ a. Une asymptote horizontale et une asymptote de pente -20 dB/dec.
☒ b. Une asymptote horizontale et une asymptote de pente -40 dB/dec.
☐ c. Une asymptote de pente -20 dB/dec et une asymptote de pente 20 dB/dec.
☐ d. Une asymptote horizontale et une asymptote de pente $+40$ dB/dec.

La fonction précédente est de la forme $\underline{H} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q_0\omega_0}}$ avec $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

(pulsation propre) et $Q_0 = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{L\omega_0}{R}$ (facteur de qualité).

En très basse fréquence, c'est-à-dire pour $\omega \ll \omega_0$, $\underline{H} \approx 1$, ce qui donne $G_{dB} \approx 0$. C'est l'équation d'une droite horizontale.

En très haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$), $\underline{H} \approx \frac{1}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$, ce qui donne

$$G_{dB} \approx 20 \log_{10} \left(\left| -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right| \right)$$

donc $G_{dB} \approx -40 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$. C'est l'équation d'une droite de pente -40 dB/dec avec la variable $\log_{10}(\omega)$. Il s'agit d'un filtre passe-bas (il atténue les hautes fréquences) du second ordre (terme en ω^2).

3 Soit le circuit de la question 1. Si on pose $u_e(t) = U_e \sqrt{2} \cos \omega t$ et $u_s(t) = U_s \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$, le déphasage φ vérifie :

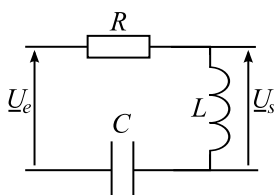
☐ a. $\tan \varphi = \frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}$ ☐ b. $\tan \varphi = \frac{1}{RC\omega} - \frac{L\omega}{R}$

☒ c. $\tan \varphi = \frac{RC\omega}{LC\omega^2 - 1}$ ☐ d. $\tan \varphi = \frac{1}{RC\omega} - \frac{L\omega}{R}$

$\underline{H} = \frac{U_s e^{j\varphi}}{U_e} = \frac{U_s}{U_e (\cos \varphi - j \sin \varphi)} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$. On en déduit que

$\frac{U_e}{U_s} \cos \varphi = 1 - LC\omega^2$ et $\frac{U_e}{U_s} \sin \varphi = -RC\omega$ donc $\tan \varphi = \frac{-RC\omega}{1 - LC\omega^2}$.

4 Calculer la fonction de transfert du circuit (supposé non chargé) :



☐ a. $\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{R}{jL\omega}}$

☐ b. $\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$

☒ c. $\underline{H} = \frac{1}{1 - j\frac{R}{L\omega} - \frac{1}{LC\omega^2}}$

☐ d. $\underline{H} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)}$

De nouveau, grâce à un diviseur de tension, on obtient :

$\underline{U_s} = \frac{\underline{Z_L}}{R + \underline{Z_C} + \underline{Z_L}} \underline{U_e} = \frac{\underline{U_e}}{R \underline{Y_L} + \underline{Z_C} \underline{Y_L} + 1}$

donc après mise en forme : $\underline{H} = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{1}{\frac{R}{jL\omega} - \frac{1}{LC\omega^2} + 1} = \frac{1}{1 - j\frac{R}{L\omega} - \frac{1}{LC\omega^2}}$.

5 Soit le circuit de la question 4. Le tracé du diagramme de Bode pour le gain G_{dB} comporte :

- ☐ a. Une asymptote horizontale et une asymptote de pente $+20$ dB/dec.
- ☐ b. Une asymptote horizontale et une asymptote de pente -40 dB/dec.
- ☐ c. Une asymptote de pente -20 dB/dec et une asymptote de pente 20 dB/dec.
- ☒ d. Une asymptote horizontale et une asymptote de pente $+40$ dB/dec.

La fonction précédente est de la forme $\underline{H} = \frac{1}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{\omega_0}{jQ_0\omega}}$ avec les mêmes notations

que pour le premier circuit.

En très basse fréquence, c'est-à-dire pour $\omega \ll \omega_0$, $\underline{H} \approx -\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$, ce qui donne

$G_{dB} \approx 20 \log_{10} \left(\left| -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right| \right)$ donc $G_{dB} \approx 40 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$. C'est l'équation d'une droite de pente + 40 dB/dec avec la variable $\log_{10}(\omega)$.

En très haute fréquence, c'est-à-dire pour $\omega \gg \omega_0$, $\underline{H} \approx 1$, ce qui donne $G_{dB} \approx 0$.

Il s'agit d'un filtre passe-haut du second ordre.

6 Soit le circuit de la question 4. Si on pose $u_e(t) = U_e \sqrt{2} \cos \omega t$ et $u_s(t) = U_s \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$, le déphasage φ vérifie :

☐ a. $\tan \varphi = \frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}$ ☐ b. $\tan \varphi = \frac{1}{RC\omega} - \frac{L\omega}{R}$

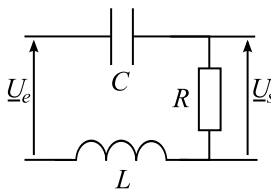
☒ c. $\tan \varphi = \frac{RC\omega}{LC\omega^2 - 1}$ ☐ d. $\tan \varphi = \frac{1}{RC\omega} - \frac{L\omega}{R}$

$$\underline{H} = \frac{U_s e^{j\varphi}}{U_e} = \frac{U_s}{U_e (\cos \varphi - j \sin \varphi)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{LC\omega^2} - j \frac{R}{L\omega}}$$

On en déduit que $\frac{U_e}{U_s} \cos \varphi = 1 - \frac{1}{LC\omega^2}$ et $\frac{U_e}{U_s} \sin \varphi = \frac{R}{L\omega}$

donc $\tan \varphi = \frac{R}{L\omega \left(1 - \frac{1}{LC\omega^2} \right)} = \frac{RC\omega}{LC\omega^2 - 1}$.

7 Calculer la fonction de transfert du circuit (supposé non chargé) :



☒ a. $\underline{H} = \frac{1}{1 + j \left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega} \right)}$ ☐ b. $\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$

☐ c. $\underline{H} = \frac{1}{1 - j \frac{R}{L\omega} - \frac{1}{LC\omega^2}}$ ☐ d. $\underline{H} = \frac{j \left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega} \right)}{1 + j \left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega} \right)}$

Avec le même raisonnement, on obtient : $\underline{U_s} = \frac{R}{R + \underline{Z_C} + \underline{Z_L}} \underline{U_e} = \frac{\underline{U_e}}{1 + \frac{\underline{Z_C}}{R} + \frac{\underline{Z_L}}{R}}$ d'où

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{1}{jRC\omega} + \frac{jL\omega}{R}} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)}.$$

8 Soit le circuit de la question 7. Le tracé du diagramme de Bode pour le gain G_{dB} comporte :

- ☒ a. Un maximum pour $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- ☐ b. Un minimum pour $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- ☒ c. Une asymptote de pente -20 dB/dec et une asymptote de pente 20 dB/dec.
- ☐ d. Une asymptote horizontale et une asymptote de pente $+40$ dB/dec.

La fonction de transfert est de la forme $\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$.

Le module est égal à $|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[Q_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]^2}}$. Il passe par un maximum quand le dénominateur de la fraction est minimal, donc pour $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

En très basse fréquence, c'est-à-dire pour $\omega \ll \omega_0$, $\underline{H} \approx \frac{1}{jQ_0\left(-\frac{\omega_0}{\omega}\right)} = j\frac{\omega}{Q_0\omega_0}$, ce qui

donne $G_{dB} \approx 20 \log_{10}\left(\left|\frac{\omega}{Q_0\omega_0}\right|\right)$.

C'est l'équation d'une droite de pente $+20$ dB/dec avec la variable $\log_{10}(\omega)$.

En très haute fréquence, c'est-à-dire pour $\omega \gg \omega_0$, $\underline{H} \approx \frac{1}{jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$, ce qui donne

$G_{dB} \approx 20 \log_{10}\left(\left|\frac{\omega_0}{Q_0\omega}\right|\right)$. C'est l'équation d'une droite de pente -20 dB/dec avec la variable $\log_{10}(\omega)$.

Les deux asymptotes se croisent pour $\omega = \omega_0$ et alors $G_{dB} = -20 \log_{10}(Q_0)$.

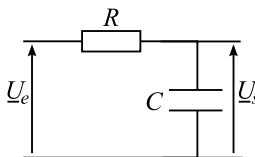
Il s'agit d'un filtre passe-bande, centré sur la pulsation propre ω_0 .

- 9** Soit le circuit de la question 7. Si on pose $u_e(t) = U_e \sqrt{2} \cos \omega t$ et $u_s(t) = U_s \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$, le déphasage φ vérifie :

☐ a. $\tan \varphi = \frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}$ ☐ b. $\tan \varphi = \frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}$
☐ c. $\tan \varphi = \frac{RC\omega}{LC\omega^2 - 1}$ ☒ d. $\tan \varphi = \frac{1}{RC\omega} - \frac{L\omega}{R}$

$$\underline{H} = \frac{U_s e^{j\varphi}}{U_e} = \frac{U_s}{U_e (\cos \varphi - j \sin \varphi)} = \frac{1}{1 + j \left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega} \right)}$$
. On en déduit que $\frac{U_e}{U_s} \cos \varphi = 1$
 et $\frac{U_e}{U_s} \sin \varphi = -\frac{L\omega}{R} + \frac{1}{RC\omega}$ donc $\tan \varphi = \frac{1}{RC\omega} - \frac{L\omega}{R}$.

- 10** Déterminer la fonction de transfert et en déduire l'équation différentielle du circuit :



☒ a. $\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$ ☐ b. $\underline{H} = 1 + jRC\omega$
☐ c. $\frac{du_s}{dt} + \frac{1}{RC}u_s = 0$ ☒ d. $\frac{du_s}{dt} + \frac{1}{RC}u_s = \frac{u_e}{RC}$

On retrouve ici la fonction de transfert classique du premier ordre fondamental

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}.$$

Pour en déduire l'équation différentielle du circuit, il faut utiliser l'équivalence entre la multiplication par $j\omega$ et la dérivation par rapport au temps : $\frac{U_s}{U_e} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$ donc

$$\underline{U}_s (1 + jRC\omega) = \underline{U}_e \text{ d'où on tire l'équation } u_s + RC \frac{du_s}{dt} = u_e.$$

- 11** Déterminer pour le circuit de la question 10 la relation entre la pulsation de coupure ω_C et le temps caractéristique τ .

☒ a. $\tau \omega_C = 1$
☐ b. $\tau \omega_C = \sqrt{2}$
☒ c. Le circuit est rapide si la bande passante est large.
☐ d. Le circuit est lent si la bande passante est large.

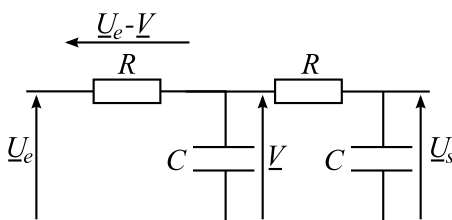
Dans l'expression de la fonction de transfert sous forme canonique $\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$, la pul-

sation de coupure est ω_0 donc ici $\omega_C = \omega_0 = \frac{1}{RC}$.

L'équation $\frac{du_s}{dt} + \frac{1}{RC}u_s = \frac{u_e}{RC}$ a pour temps caractéristique $\tau = RC$.

On en déduit que $\omega_C = \frac{1}{\tau}$.

12 Déterminer la fonction de transfert et en déduire l'équation différentielle du circuit :



☐ a. $\underline{H} = \frac{1}{(1 + jRC\omega)^2}$

☒ b. $\underline{H} = \frac{1}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2}$

☐ c. $\frac{d^2u_s}{dt^2} + \frac{2}{RC} \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{(RC)^2}u_s = \frac{u_e}{(RC)^2}$

☒ d. $\frac{d^2u_s}{dt^2} + \frac{3}{RC} \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{(RC)^2}u_s = \frac{u_e}{(RC)^2}$

Soit la tension intermédiaire $\underline{V}$. Par une loi de nœud, $\frac{U_e - V}{R} = jC\omega V + jC\omega U_s$.

Par un diviseur de tension, $\underline{U_s} = \frac{\underline{V}}{1 + jRC\omega}$.

On élimine la tension intermédiaire :

$$\underline{U_e} = \underline{V}(1 + jRC\omega) + jRC\omega \underline{U_s} = (1 + jRC\omega)^2 \underline{U_s} + jRC\omega \underline{U_s} = (1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2) \underline{U_s}$$

d'où

$$\underline{H} = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{1}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2}.$$

Avec l'équivalence entre la multiplication par $j\omega$ et la dérivation par rapport au temps la relation complexe $\underline{U_s}(1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2) = \underline{U_e}$ conduit à l'équation différentielle :

$$u_s + 3RC \frac{du_s}{dt} + (RC)^2 \frac{d^2u_s}{dt^2} = u_e.$$

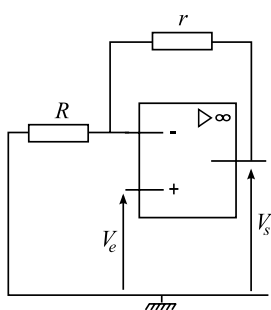
9 Amplificateur opérationnel

- 1** On dispose d'un amplificateur opérationnel idéal et de deux résistances $R_A = 10 \text{ k}\Omega$ et $R_B > R_A$ à choisir. On souhaite réaliser un circuit amplificateur tel que la tension de sortie égale à 4 fois la tension d'entrée et de même signe. Représenter le montage et en déduire la valeur de R_B .

☐ a. $R_B = 20 \text{ k}\Omega$ ☒ b. $R_B = 30 \text{ k}\Omega$

☐ c. $R_B = 40 \text{ k}\Omega$ ☐ d. $R_B = 50 \text{ k}\Omega$

Le circuit amplificateur non inverseur est le suivant :



L'AO étant supposé idéal, les courants d'entrée sont nuls. Les résistances r et R sont donc parcourues par le même courant, elles forment un diviseur de tension et on a la relation $V^- = \frac{RV_s}{R+r}$. On peut supposer que l'AO fonctionne en mode linéaire puisqu'il y a une liaison entre l'entrée inverseuse et la sortie donc $V^+ = V^- = V_e$. On arrive à $V_e = \frac{RV_s}{R+r}$ et finalement $V_s = \left(1 + \frac{r}{R}\right)V_e$. Il faut pour que $V_s = 4V_e$ choisir $r = 3R$ donc $R = R_A = 10 \text{ k}\Omega$ et $r = R_B = 30 \text{ k}\Omega$.

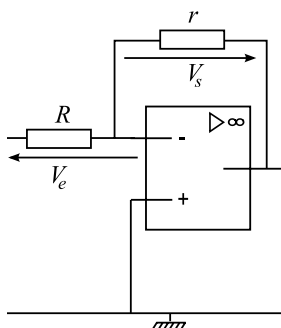
- 2** L'amplificateur opérationnel est supposé idéal. Déterminer la fonction de transfert

$\underline{H} = \frac{V_s}{V_e}$ en régime sinusoïdal.

☐ a. $\underline{H} = \frac{R}{r}$ ☐ b. $\underline{H} = \frac{r}{R}$

☐ c. $\underline{H} = -\frac{R}{r}$ ☒ d. $\underline{H} = -\frac{r}{R}$

L'AO étant supposé idéal, les courants d'entrée sont nuls. Les résistances r et R sont donc parcourues par le même courant. On peut supposer que l'AO fonctionne en mode linéaire puisqu'il y a une liaison entre l'entrée inverseuse et la sortie donc $V^+ = V^- = 0$. On remarque donc une masse virtuelle sur l'entrée inverseuse et on peut repositionner les flèches de tension comme sur le schéma :



On arrive en appliquant une loi de nœud à $\frac{V_e}{R} = -\frac{V_s}{r}$ soit $\frac{V_s}{V_e} = -\frac{r}{R}$. Il y a amplification et changement de signe, il s'agit d'un montage amplificateur inverseur.

- 3** Soit le circuit comportant un amplificateur opérationnel idéal, un condensateur et un résistor :

☒ a. Le montage est dérivateur. ☐ b. Le montage est intégrateur

☐ c. $\underline{V_e} = -jRC\omega \underline{V_s}$ ☒ d. $\underline{V_e} = -jRC\omega \underline{V_s}$

La structure est la même que celle du montage précédent. Avec les mêmes hypothèses, la relation sur les tensions complexes est $\frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = -\frac{R}{Z_C} = -jRC\omega$. La multiplication d'une tension complexe par le facteur $j\omega$ revenant à la dériver, l'expression $\underline{V_s} = -jRC\omega \underline{V_e}$ signifie que la tension de sortie est proportionnelle à la dérivée de la tension d'entrée.

- 4** Déterminer la relation entre les tensions U_e , V_e et V_s si $R = 10 \text{ k}\Omega$, $R' = 20 \text{ k}\Omega$ et $r = 100 \text{ k}\Omega$.

☐ a. $V_s = 10V_e + 5U_e$ ☒ b. $V_s = -10V_e - 5U_e$

☐ c. $V_s = 10V_e + 5U_e$ ☐ d. $V_s = -10V_e - 5U_e$

Ce montage est du même type que l'amplificateur inverseur, avec une résistance supplémentaire du côté de l'entrée. La loi des nœuds sur l'entrée inverseuse s'écrit alors $\frac{V_e}{R} + \frac{U_e}{R'} = i^- - \frac{V_s}{r} = -\frac{V_s}{r}$ d'où on tire $V_s = -r\left(\frac{V_e}{R} + \frac{U_e}{R'}\right)$. Le résultat est une combinaison linéaire des tensions d'entrées.

Si on choisit des valeurs de résistances toutes égales, $V_s = -(V_e + U_e)$, c'est pourquoi on qualifie ce montage de « sommateur ».

- 5** Déterminer la relation entre les tensions U_e , V_e et V_s .

☐ a. $V_s = V_e + U_e$ ☐ b. $V_s = V_e - U_e$

☒ c. $V_s = U_e - V_e$ ☐ d. $V_s = -(V_e + U_e)$

Les courants d'entrée étant nuls pour l'AO idéal, on remarque un diviseur de tension sur l'entrée non inverseuse : $V^+ = \frac{R}{R+R'} U_e = \frac{U_e}{2}$. L'AO est supposé fonctionner en mode linéaire du fait de l'existence d'une liaison entre l'entrée inverseuse et la sortie donc $V^+ = V^- = \frac{U_e}{2}$. D'après une loi des nœuds sur les résistances liées à l'entrée inverseuse, $\frac{V_e - V^-}{R} = \frac{V^- - V_s}{R}$ d'où $V_s = 2V^- - V_e$. Comme $V^- = \frac{U_e}{2}$ on obtient $V_s = U_e - V_e$. Le montage est soustracteur.

- 6** Déterminer la fonction de transfert du montage ainsi que le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée, la tension d'entrée étant sinusoïdale :

☒ a. $\underline{H} = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}$ ☐ b. $\underline{H} = \frac{1 + jRC\omega}{1 - jRC\omega}$

☒ c. $\varphi = -2\text{Arctan}(RC\omega)$ ☐ d. $\varphi = 2\text{Arctan}\left(\frac{1}{RC\omega}\right)$

Les courants d'entrée étant nuls pour l'AO idéal, on remarque un diviseur de tension complexe sur l'entrée non inverseuse :

$$\underline{V^+} = \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_C} + R} \underline{V_e} = \frac{\underline{V_e}}{1 + R\underline{Y_C}} = \frac{\underline{V_e}}{1 + jRC\omega}.$$

L'AO est supposé fonctionner en mode linéaire du fait de l'existence d'une liaison entre l'entrée inverseuse et la sortie donc $\underline{V^+} = \underline{V^-}$. D'après une loi des nœuds sur les résistances liées à l'entrée inverseuse,

$$\frac{\underline{V_e} - \underline{V^-}}{R} = \frac{\underline{V^-} - \underline{V_s}}{R}, \text{ d'où } \underline{V_s} = 2\underline{V^-} - \underline{V_e}.$$

Comme $\underline{V^-} = \underline{V^+}$, on obtient

$$\underline{V_s} = \frac{2\underline{V_e}}{1 + jRC\omega} - \underline{V_e} = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega} \underline{V_e}$$

donc $\underline{H} = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}.$

Le module de cette fonction de transfert étant égal à 1, il ne s'agit pas d'un circuit amplificateur. Par contre il introduit un déphasage entre l'entrée et la sortie.

En effet $\arg(\underline{H}) = \arg(1 - jRC\omega) - \arg(1 + jRC\omega)$ donc l'avance de phase de la sortie sur l'entrée φ est donnée par la relation :

$$\varphi = \text{Arctan}(-RC\omega) - \text{Arctan}(RC\omega) = -2\text{Arctan}(RC\omega).$$

7 L'amplificateur opérationnel étant idéal, déterminer si :

- ☐ a. $V_s = V_{sat}$ pour $V_e < E$ ☒ b. $V_s = V_{sat}$ pour $V_e > E$
☒ c. Le montage est comparateur. ☐ d. Le montage est amplificateur.

Du fait de l'absence de liaison entre l'entrée et la sortie, le montage fonctionne en comparateur.

Soit $V_s = V_{sat}$: c'est le cas si $V^+ > V^-$ donc pour $V_e > E$.

Soit $V_s = -V_{sat}$: c'est le cas si $V^+ < V^-$ donc pour $V_e < E$.

Le signe de sortie permet donc de savoir si V_e est plus petit ou plus grand que E , c'est pourquoi on parle de montage comparateur.

8 Déterminer les valeurs de la tension d'entrée provoquant le basculement de la tension de sortie entre les valeurs $+V_{sat}$ et $-V_{sat}$.

- ☐ a. Dans le sens montant, la tension de basculement est $V_B = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}.$
☒ b. Dans le sens montant, la tension de basculement est $V'_B = \frac{-R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}.$
☒ c. Dans le sens descendant, la tension de basculement est $V_B = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}.$
☐ d. Dans le sens descendant, la tension de basculement est $V'_B = \frac{-R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}.$

Du fait de l'absence de liaison entre l'entrée et la sortie, ce montage fonctionne également en comparateur. Le basculement de la sortie a lieu quand $V^+ - V^-$ change de signe.

Or en utilisant un diviseur de tension (les courants d'entrée sont nuls pour un AO idéal),

$$V^+ = V_s \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \text{ donc } V^+ - V^- = V_s \frac{R_1}{R_1 + R_2} - V_e.$$

Soit $V_s = V_{sat}$: il faut que $V^+ > V^-$; c'est possible si $\frac{R_1 V_{sat}}{R_1 + R_2} > V_e$.

Soit $V_s = -V_{sat}$: il faut que $V^+ < V^-$; c'est possible si $\frac{-R_1 V_{sat}}{R_1 + R_2} < V_e$.

Soit $V_B = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$. Pour une tension d'entrée vérifiant $-V_B < V_e < V_B$ les deux états de la sortie sont possibles : pour savoir lequel sera effectivement observé il faut tenir compte de l'évolution antérieure du système, en partant d'une valeur de la tension d'entrée pour laquelle l'état de la sortie est parfaitement connu.

Par exemple, si $V_e > \frac{R_1 V_{sat}}{R_1 + R_2}$ la seule possibilité pour la sortie est que $V_s = -V_{sat}$, et donc

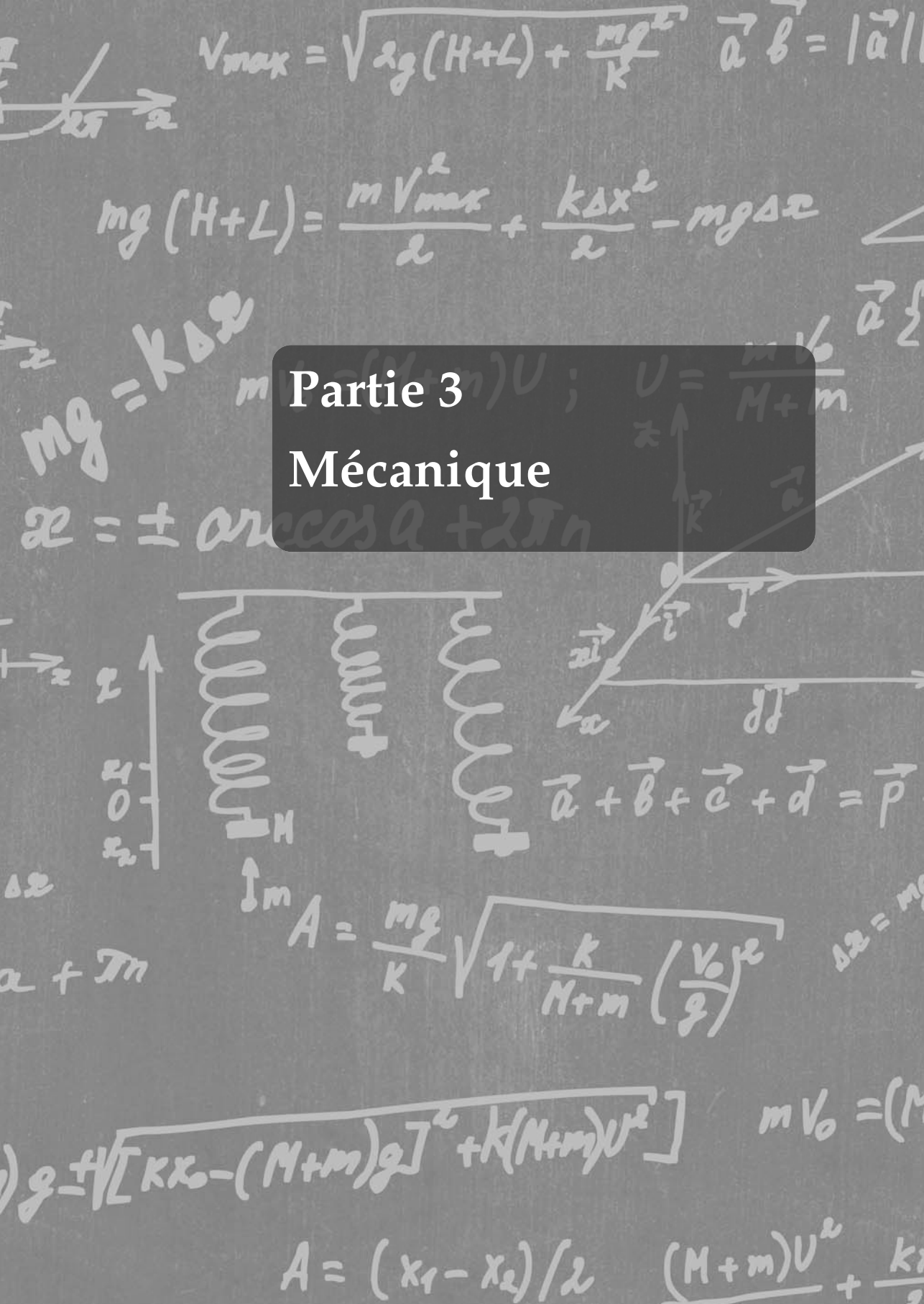
$V^+ < V^-$. Quand V_e diminue, $V^+ - V^-$ reste négatif tant que $\frac{-R_1 V_{sat}}{R_1 + R_2} < V_e$. Le passage par cette valeur provoque le basculement de la sortie de $V_s = -V_{sat}$ à $V_s = V_{sat}$ donc $V'_B = -V_B = \frac{-R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$ est la tension de basculement dans le sens montant $-V_{sat} \rightarrow V_{sat}$.

On montrerait de même que $V_B = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$ est la tension de basculement dans le sens descendant $V_{sat} \rightarrow -V_{sat}$.

Il s'agit d'un comparateur à hystérésis.

Partie 3

Mécanique



Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

- Les coordonnées cartésiennes et cylindriques.
- Les notions de trajectoire, de vitesse, d'accélération dans un référentiel donné R .

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication.

Notations. Dans tout le chapitre, on note O l'origine du repère, $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ les vecteurs unitaires du repère cartésien lié au référentiel d'étude, $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ les vecteurs unitaires du repère local cylindrique.

1 Soit un point matériel M en mouvement dans un référentiel R .

- ☐ V ☐ F **a.** Un point matériel est un système de petites dimensions.
- ☐ V ☐ F **b.** La trajectoire de M dépend du référentiel d'étude
- ☐ V ☐ F **c.** L'unité de vitesse est le kilomètre-heure.
- ☐ V ☐ F **d.** Si le mouvement est uniforme, l'accélération de M est nulle.

2 On considère dans le plan xOy les vecteurs de base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ ($\rho = OM$ et θ est l'angle polaire entre Ox et $\vec{OM}$).

- ☐ V ☐ F **a.** $\vec{u}_x = \cos \theta \cdot \vec{u}_\rho + \sin \theta \cdot \vec{u}_\theta$
- ☐ V ☐ F **b.** $\vec{u}_y = \sin \theta \cdot \vec{u}_\rho - \cos \theta \cdot \vec{u}_\theta$
- ☐ V ☐ F **c.** $\vec{u}_\rho = \cos \theta \cdot \vec{u}_x + \sin \theta \cdot \vec{u}_y$
- ☐ V ☐ F **d.** $\vec{u}_\theta = \sin \theta \cdot \vec{u}_x - \cos \theta \cdot \vec{u}_y$

- 3** Soit un point matériel M en mouvement rectiligne dans le plan xOy lié à R .
- ☐ V ☐ F a. Les vecteurs vitesse et accélération de M ont une direction constante.
- ☐ V ☐ F b. Les vecteurs vitesse et accélération de M ont une norme constante.
- ☐ V ☐ F c. Si le mouvement est uniforme, l'accélération de M est nulle.
- ☐ V ☐ F d. Au moment où M fait demi-tour, son accélération s'annule.
- 4** Soit un point matériel M en mouvement circulaire de centre O dans le plan xOy lié à R .
- ☐ V ☐ F a. Si le mouvement est uniforme, le vecteur vitesse est constant.
- ☐ V ☐ F b. Si le mouvement est uniforme, l'accélération de M est centripète.
- ☐ V ☐ F c. Le vecteur rotation $\vec{\omega}$ est perpendiculaire au plan de la trajectoire.
- ☐ V ☐ F d. Le vecteur vitesse est donné par $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$

Consignes

QCM

Il peut y avoir, pour certaines questions, deux propositions exactes.

- 5** L'accélération de M est égale à $\vec{a} = a_1 \vec{u}_y$ où a_1 est une constante. À $t = 0$, la vitesse $\vec{v}_0$ est parallèle à $\vec{u}_x$.
- ☐ a. Le mouvement est rectiligne. ☐ b. Le mouvement est circulaire.
- ☐ c. Le mouvement est parabolique. ☐ d. $\|\vec{v}\| = |v_0 + a_1 t|$
- 6** Le point M est en mouvement dans le plan xOy ; les équations horaires du mouvement sont $x(t) = A \cdot \cos(\omega t) + x_1$ et $y(t) = y_0$ avec x_1 et y_0 des constantes.
- ☐ a. La trajectoire est sinusoïdale.
- ☐ b. L'équation différentielle du mouvement est $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \omega^2 x_1$.
- ☐ c. La trajectoire est rectiligne.
- ☐ d. L'équation différentielle du mouvement est $\frac{d^2 x}{dt^2} - \omega^2 x = -\omega^2 x_1$.

- 7** Le point M est en mouvement le long de l'axe Ox ; sa vitesse initiale est $v_{0x} = v_0 > 0$. Il se déplace avec une accélération constante jusqu'à l'instant t_1 où sa vitesse a doublé, puis freine de façon uniforme jusqu'à s'arrêter à l'instant final $t_2 = 2t_1$. Quelle est la distance totale L parcourue ?

☐ a. $L = 2v_0 t_1$ ☐ b. $L = 2,25 v_0 t_1$
☐ c. $L = 2,5 v_0 t_1$ ☐ d. $L = 2,75 v_0 t_1$

- 8** Le point matériel A se déplace à vitesse constante de norme V vers la gauche sur l'axe Ox , le point matériel B se déplace à vitesse constante de même norme sur l'axe Oy ; initialement, B est à l'origine du repère, A est situé à droite de O , à une distance L . Déterminer les positions de A et B à un instant quelconque et en déduire la distance D minimale entre les deux points.

☐ a. $D = \frac{L}{4}$ ☐ b. $D = \frac{L}{3}$ ☐ c. $D = \frac{L}{2}$ ☐ d. $D = \frac{L}{\sqrt{2}}$

- 9** Le point M parcourt le cercle de rayon $b = 10 \text{ cm}$ à la vitesse $v_0 = 2\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

☐ a. La période de rotation est $T = 100\pi \text{ ms}$.
☐ b. L'accélération vaut $6,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
☐ c. La période de rotation est $T = 10\pi \text{ s}$.
☐ d. L'accélération vaut $40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

- 10** Le point M parcourt le cercle de rayon b à la vitesse $v = \alpha t$ où α est une constante positive. Soient v_ρ et v_θ les composantes de la vitesse.

☐ a. $v_\rho = \alpha t$ ☐ b. $v_\rho = 0$ ☐ c. $v_\theta = \alpha t$ ☐ d. $v_\theta = 0$

- 11** Le point M parcourt le cercle de rayon b à la vitesse $v_0 = \alpha t$ où α est une constante. Soient a_ρ et a_θ les composantes de l'accélération.

☐ a. $a_\rho = \alpha$ ☐ b. $a_\rho = -\frac{(\alpha t)^2}{b}$ ☐ c. $a_\theta = \alpha$ ☐ d. $a_\theta = 0$

- 12** Le point M se déplace sur une courbe plane d'équation en coordonnées polaires dans le plan xOy : $\rho = \rho_0 \cdot \exp(-\theta)$ avec $\theta = \omega t$. La norme de la vitesse vaut :

☐ a. $v = 0$ ☐ b. $v = \omega \cdot \rho$
☐ c. $v = \sqrt{2} \cdot \omega \cdot \rho$ ☐ d. $v = 2 \cdot \omega \cdot \rho$

- 13** Le point M se déplace sur une courbe plane d'équation en coordonnées polaires dans le plan xOy : $\rho = \rho_0 \cdot \exp(-\theta)$ avec $\theta = \omega t$. Les composantes de l'accélération sont :

☐ a. $a_\rho = \omega^2 \rho$ ☐ b. $a_\rho = 0$ ☐ c. $a_\theta = -2\omega^2 \rho$ ☐ d. $a_\theta = 0$

- 14** Le point M se déplace d'un mouvement uniforme (vitesse de norme v_0) dans le plan xOy , son vecteur vitesse faisant l'angle constant α avec $\overrightarrow{OM}$; à $t = 0$, $OM = \rho = b$ et $\theta = 0$.

☐ a. $\rho = b + v_0 t \sin \alpha$ ☐ b. $\rho = b + v_0 t \cos \alpha$

☐ c. $\theta = \tan \alpha \cdot \ln\left(\frac{\rho}{b}\right)$ ☐ d. $\theta = \frac{v_0 t \sin \alpha}{b}$

- 15** Le point M se déplace sur une parabole d'équation $y = \alpha x^2$ dans le plan xOy (α constante positive). La composante de la vitesse $v_x = v_0 > 0$ est constante ; à $t = 0$, M est à l'origine du repère. Calculer les normes de la vitesse et de l'accélération.

☐ a. $v = v_0 + 2\alpha v_0^2 t$ ☐ b. $a = 2\alpha v_0^2$

☐ c. $v = v_0 \sqrt{1 + (2\alpha v_0 t)^2}$ ☐ d. $a = \frac{4\alpha^2 v_0^2 t}{\sqrt{1 + (2\alpha v_0 t)^2}}$

- 16** Le mouvement de M est étudié en coordonnées polaires dans le plan xOy ; la vitesse angulaire est constante et égale à ω et l'accélération est orthoradiale ; à $t = 0$, M est à l'origine du repère et $v = v_0$. On peut en déduire que :

☐ a. $\rho = \frac{v_0}{2\omega} (e^{\omega t} - e^{-\omega t})$ ☐ b. $\rho = \frac{v_0}{\omega} (e^{\omega t} - e^{-\omega t})$

☐ c. $a_\theta = \omega v_0 (e^{\omega t} - e^{-\omega t})$ ☐ d. $a_\theta = \omega v_0 (e^{\omega t} + e^{-\omega t})$

Voir corrigés page 147

Lois de la dynamique en référentiel galiléen

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

- Les forces subies par un point matériel
- L'application du principe fondamental de la dynamique en référentiel galiléen

Notations. Dans tout le chapitre le référentiel d'étude est le référentiel terrestre, supposé galiléen. Le vecteur $\vec{g}$ désigne le champ de pesanteur, considéré comme uniforme et constant.

On note O l'origine du repère, $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ les vecteurs unitaires du repère cartésien lié au référentiel d'étude, $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ les vecteurs unitaires du repère local cylindrique.

- 1** Un point matériel M de masse m décrit à vitesse constante de norme v une trajectoire circulaire de rayon b ; déterminer la résultante des forces auxquelles il est soumis.

☐ a. $\Sigma \vec{F}$ est centripète. ☐ b. $\Sigma \vec{F}$ est centrifuge.

☐ c. $\|\Sigma \vec{F}\| = m \frac{dv}{dt}$ ☐ d. $\|\Sigma \vec{F}\| = \frac{mv^2}{b}$

- 2** Un point matériel M de masse m se déplace sur une trajectoire elliptique de centre O dans le plan xOy ; les équations horaires de son mouvement sont en coordonnées cartésiennes : $x(t) = \alpha \cos \omega t$ et $y(t) = \alpha \sin \omega t$ où α , β et ω sont des constantes.

Déterminer la résultante des forces $\Sigma \vec{F}$ subies par M .

☐ a. $\Sigma \vec{F} = m\omega^2 \overrightarrow{OM}$ ☐ b. $\Sigma \vec{F} = -m\omega^2 \overrightarrow{OM}$

☐ c. $\Sigma \vec{F} = m\omega^2 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \vec{u}_\rho$ ☐ d. $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

- 3** Un point matériel M de masse m se déplace dans le plan xOy suivant les équations horaires en coordonnées polaires : $\rho(t) = b \cos \omega t$ et $\theta(t) = \omega t$ où b et ω sont des constantes. Déterminer les composantes de la résultante des forces subies par M .

☐ a. $F_\rho = -m\omega^2 \rho$ ☐ b. $F_\rho = -2m\omega^2 \rho$

☐ c. $F_\theta = -2m\omega^2 \sin \omega t$ ☐ d. $F_\theta = 0$

- 4** Une balle de masse m est lancée depuis le sol verticalement vers le haut avec une vitesse initiale V_0 ; on néglige la résistance de l'air. Déterminer la cote $z_{\max}$ du point le plus haut de la trajectoire et la durée totale T du mouvement.

☐ a. $z_{\max} = \frac{V_0^2}{2g}$ ☐ b. $z_{\max} = \frac{V_0^2}{g}$

☐ c. $T = \frac{V_0}{2g}$ ☐ d. $T = \frac{2V_0}{g}$

- 5** Une balle de masse m est lancée horizontalement avec une vitesse initiale V_0 depuis un point situé à une hauteur H au-dessus du sol ; on néglige la résistance de l'air. Déterminer la distance horizontale D entre le point de départ et le point de chute.

☐ a. $D = V_0 \sqrt{\frac{H}{2g}}$ ☐ b. $D = V_0 \sqrt{\frac{H}{g}}$

☐ c. $D = V_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$ ☐ d. $D = 2V_0 \sqrt{\frac{H}{g}}$

- 6** Une bille de masse m est lâchée sans vitesse initiale ; on tient compte lors de la chute de la résistance de l'air, supposée de la forme $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ avec α une constante positive. Écrire l'équation du mouvement et en déduire la vitesse limite v_l . Déterminer la durée T au bout de laquelle la vitesse est égale à la moitié de v_l .

☐ a. $v_l = \frac{mg}{2\alpha}$ ☐ b. $v_l = \frac{mg}{\alpha}$

☐ c. $T = \frac{2m}{\alpha}$ ☐ d. $\frac{m \ln 2}{\alpha}$

- 7** Une bille de masse m est lancée verticalement vers le haut ; on tient compte, lors du mouvement, de la résistance de l'air supposée de la forme $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ avec α une constante positive. Déterminer le temps T mis pour atteindre le sommet de la trajectoire, la vitesse initiale étant V_0 .

☐ a. $T = \frac{m}{\alpha} \ln \left(2 + \frac{\alpha V_0}{mg} \right)$ ☐ b. $T = 2 \frac{m}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\alpha V_0}{mg} \right)$

☐ c. $T = \frac{m}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\alpha V_0}{mg} \right)$ ☐ d. $T = \frac{m}{2\alpha} \ln \left(1 + \frac{\alpha V_0}{mg} \right)$

- 8** Un palet de masse m glisse sur un plan horizontal ; il existe une force de frottement telle que $\|\vec{R}_t\| = f \|\vec{R}_n\|$ avec $\vec{R}_n$ la réaction normale au plan et $\vec{R}_t$ la réaction tangentielle. Le coefficient de frottement f est une constante positive.

À l'instant initial, $\|\vec{v}\|$ est égale à v_0 . Déterminer la distance parcourue par le palet avant qu'il ne s'arrête.

☐ a. $L = \frac{V_0^2}{4fg}$ ☐ b. $L = \frac{V_0^2}{3fg}$

☐ c. $L = \frac{V_0^2}{2fg}$ ☐ d. $L = \frac{V_0^2}{fg}$

- 9** Un palet M de masse m est posé sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale ; il existe une force de frottement telle que $\|\vec{R}_t\| = f \|\vec{R}_n\|$ avec $\vec{R}_n$ la réaction normale au plan et $\vec{R}_t$ la réaction tangentielle ; à quelle condition M se met-il à glisser ?

☐ a. $\sin \alpha > f \cos \alpha$ ☐ b. $\sin \alpha < f \cos \alpha$

☐ c. $\cos \alpha > f \sin \alpha$ ☐ d. $\cos \alpha < f \sin \alpha$

- 10** Un palet de masse m glisse sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale ; il existe une force de frottement telle que $\|\vec{R}_t\| = f \|\vec{R}_n\|$ avec $\vec{R}_n$ la réaction normale au plan et $\vec{R}_t$ la réaction tangentielle.

À l'instant initial, $\|\vec{v}\| = v_0$ et le vecteur vitesse est orienté suivant la ligne de plus grande pente, vers le bas.

Déterminer la réaction $\|\vec{R}\|$ exercée par le support et l'expression de la vitesse en fonction du temps.

☐ a. $\|\vec{R}\| = mg \cos \alpha (1 + f)$

☐ b. $\|\vec{R}\| = mg \cos \alpha \sqrt{1 + f^2}$

☐ c. $v_x(t) = V_0 + gt(\cos \alpha - f \sin \alpha)$

☐ d. $v_x(t) = V_0 + gt(\sin \alpha - f \cos \alpha)$

- 11** Un point matériel M de masse m est accroché à un fil inextensible de masse négligeable et de longueur L . L'autre extrémité du fil est accrochée à un point O fixe. Le point M se déplace sur le plan xOy horizontal ; à $t = 0$ sa vitesse $\vec{v}_0$ est

horizontale et perpendiculaire au fil tendu. On néglige les frottements. Déterminer la nature du mouvement et la tension du fil sachant que le fil reste tendu.

☐ a. mouvement circulaire uniforme ☐ b. mouvement oscillatoire

☐ c. $\|\vec{T}\| = m \frac{v_0^2}{2L}$

☐ d. $\|\vec{T}\| = m \frac{v_0^2}{L}$

- 12** Un point matériel M de masse m est suspendu à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_v dont l'autre extrémité est le point O fixe. L'axe Oz vertical est orienté vers le bas. On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$, le mouvement étant supposé vertical ?

☐ a. $\frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2 z = g + \omega_0^2 l_v$ ☐ b. $\frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2 z = -g + \omega_0^2 l_v$

☐ c. $\frac{d^2z}{dt^2} - \omega_0^2 z = g - \omega_0^2 l_v$ ☐ d. $\frac{d^2z}{dt^2} - \omega_0^2 z = -g - \omega_0^2 l_v$

- 13** Un point matériel M de masse m est accroché à un ressort de raideur k dont l'autre extrémité est le point O fixe. M glisse sans frottement sur l'axe horizontal Ox . À l'instant initial le ressort a sa longueur à vide l_v et la vitesse de M est $\vec{v}_0$ colinéaire à Ox ; quel est l'allongement maximal du ressort ?

☐ a. $\sqrt{2}l_v$ ☐ b. $\frac{l_v}{\sqrt{2}}$ ☐ c. $v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}$ ☐ d. $\frac{mg}{k}$

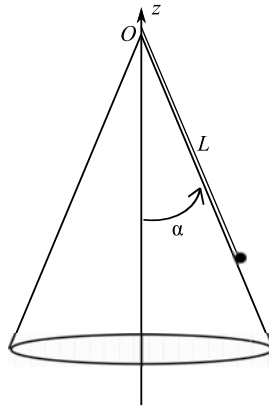
- 14** Un point matériel M de masse m est posé au fond d'une demi-sphère de rayon b ; on lui communique à $t = 0$ une vitesse v_0 horizontale ; quelle est à cet instant la réaction du support sachant que M glisse sans frottement sur la sphère ?

☐ a. $\|\vec{R}\| = mg$ ☐ b. $\|\vec{R}\| = m \frac{v_0^2}{b} + mg$

☐ c. $\|\vec{R}\| = 2mg$ ☐ d. $\|\vec{R}\| = m \frac{v_0^2}{2b} + mg$

- 15** Un point matériel M de masse m est accroché à un fil inextensible de masse négligeable et de longueur L . L'autre extrémité du fil est accrochée à un point O fixe. M se déplace sans frottement sur un cône d'axe vertical Oz , de sommet O , de demi-angle au sommet α .

En supposant que le fil reste tendu à tout instant et que la vitesse v est constante, déterminer la réaction du support.



- ☐ a. $R_n = m \left(\frac{v^2}{L \tan \alpha} + g \sin \alpha \right)$
☐ b. $R_n = m \left(-\frac{v^2}{L \tan \alpha} + g \sin \alpha \right)$
- ☐ c. $R_n = m \left(\frac{v^2 \tan \alpha}{L} + g \sin \alpha \right)$
☐ d. $R_n = m \left(-\frac{v^2 \tan \alpha}{L} + g \sin \alpha \right)$

Voir corrigés page [154](#)

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

- Le travail d'une force
- L'énergie cinétique
- L'énergie potentielle
- L'énergie mécanique

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication.

Notations. Dans tout le chapitre le référentiel d'étude est supposé galiléen.

$\vec{g}$ désigne le champ de pesanteur, considéré comme uniforme et constant.

On note O l'origine du repère, $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ les vecteurs unitaires du repère cartésien lié au référentiel d'étude, $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ les vecteurs unitaires du repère local cylindrique.

1 Notion de travail

- ☐ V ☐ F **a.** Le travail, comme la force, ne dépend pas du référentiel.
- ☐ V ☐ F **b.** Une force perpendiculaire à la trajectoire ne travaille pas.
- ☐ V ☐ F **c.** Le travail d'une force lors d'un déplacement d'un point A à un point B ne dépend que de A et de B , pas de la forme de la trajectoire.
- ☐ V ☐ F **d.** Quand une même trajectoire est parcourue dans un sens, puis dans l'autre, le travail des forces auxquelles le système est soumis change de signe.
- ☐ V ☐ F **e.** $1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

2 Notion d'énergie

- ☐ V ☐ F a. L'énergie cinétique augmente quand la résultante des forces est motrice.
- ☐ V ☐ F b. Toute force constante et uniforme dérive d'une énergie potentielle.
- ☐ V ☐ F c. L'énergie potentielle de pesanteur diminue quand l'altitude croît.
- ☐ V ☐ F d. Si l'énergie potentielle augmente, l'énergie cinétique diminue.

Consignes

QCM

Il peut y avoir, pour certaines questions, deux propositions exactes.

- 3** Soit un repère cartésien lié au référentiel terrestre ; l'axe Oz vertical est orienté vers le haut. Un point matériel M de masse m se déplace sur une parabole d'équation $z = \frac{x^2}{L}$ depuis l'origine du repère O jusqu'au point d'abscisse $x = L$. Calculer le travail du poids.

- ☐ a. $W = mgL$ ☐ b. $W = 2mgL$
- ☐ c. $W = -mgL$ ☐ d. $W = -2mgL$

- 4** Un homme de masse $m = 70$ kg monte du rez-de-chaussée au 5^e étage en portant un pack de 6 bouteilles d'eau minérale de 1,5 L (hauteur d'un étage : 2,50 m ; $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$). Déterminer la variation totale d'énergie potentielle et en déduire la puissance correspondante si l'homme monte d'une marche par seconde à raison de 18 marches par étage.

- ☐ a. 12,5 W ☐ b. 62,5 W ☐ c. 97 W ☐ d. 109,7 W

- 5** Un point matériel M de masse m est accroché à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_v . L'autre extrémité O du ressort est fixe et M se déplace le long de l'axe Ox . Déterminer le travail de la tension du ressort quand la longueur du ressort passe de l_v à $2l_v$.

- ☐ a. $W = kl_v^2$ ☐ b. $W = -kl_v^2$
- ☐ c. $W = \frac{k}{2}l_v^2$ ☐ d. $W = -\frac{k}{2}l_v^2$

- 6** Un point matériel M de masse m se déplace le long de l'axe Ox avec une accélération $\vec{a}_0$ constante ; il démarre à $t = 0$ et il subit une force de frottement fluide $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$ sur une distance L . Déterminer le travail de cette force lors du déplacement de M .

☐ a. $W = -\alpha \sqrt{a_0 L^3}$ ☐ b. $W = -\alpha \sqrt{2a_0 L^3}$

☐ c. $W = -\frac{2\alpha}{3} \sqrt{a_0 L^3}$ ☐ d. $W = -\frac{\alpha}{3} \sqrt{8a_0 L^3}$

- 7** Une balle de masse m est lancée avec une vitesse initiale v_0 depuis un point situé à une hauteur H au-dessus du sol. Son vecteur vitesse fait un angle α avec la verticale. On néglige la résistance de l'air. Déterminer la vitesse de la balle à son arrivée au sol.

☐ a. $v = \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gH}$ ☐ b. $v = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + 2gH}$

☐ c. $v = \sqrt{v_0^2 \tan^2 \alpha + 2gH}$ ☐ d. $v = \sqrt{v_0^2 + 2gH}$

- 8** Un wagonnet de masse m se déplace sans frottement sur un rail incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Il est lancé vers le haut avec une vitesse initiale v_0 . Déterminer la distance L parcourue avant de faire demi-tour.

☐ a. $L = \frac{v_0^2}{2g \tan \alpha}$ ☐ b. $L = \frac{v_0^2}{2g \cos \alpha}$

☐ c. $L = \frac{v_0^2 \tan \alpha}{2g}$ ☐ d. $L = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha}$

- 9** Un palet glisse sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale le long de la ligne de plus grande pente ; il existe une force de frottement telle que $\|\vec{R}_t\| = f \|\vec{R}_n\|$ avec $\vec{R}_n$ la réaction normale au plan et $\vec{R}_t$ la réaction tangentielle ; le coefficient de frottement f est une constante positive.

À l'instant initial, le palet est lancé vers le bas avec une vitesse de norme $\|\vec{v}\| = v_0$.

Le palet parcourt une distance avant de s'arrêter. Utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour déterminer l'expression du coefficient de frottement.

☐ a. $f = \tan \alpha - \frac{v_0^2}{2Lg \cos \alpha}$ ☐ b. $f = \tan \alpha + \frac{v_0^2}{2Lg \cos \alpha}$

☐ c. $f = \tan \alpha - \frac{v_0^2}{2Lg \sin \alpha}$ ☐ d. $f = \tan \alpha + \frac{v_0^2}{2Lg \sin \alpha}$

- 10** Un point matériel M de masse m est accroché à un fil inextensible de masse négligeable et de longueur L . L'autre extrémité du fil est accrochée à un point O fixe.

À l'instant initial, l'angle entre la verticale descendante et le fil tendu est $\alpha = 45^\circ$, la vitesse est nulle. Déterminer la vitesse v_1 de M à l'instant où il passe au point le plus bas de la trajectoire, ainsi que la tension du fil à cet instant.

☐ a. $v_1 = \sqrt{gL\sqrt{2}}$ ☐ b. $v_1 = \sqrt{gL(2 - \sqrt{2})}$

☐ c. $\|\vec{T}\| = mg(1 + \sqrt{2})$ ☐ d. $\|\vec{T}\| = mg(3 - \sqrt{2})$

- 11** Un anneau de masse m est enfilé sur un cercle de rayon b et de centre O dans le plan xOz vertical, l'axe Oz vertical étant dirigé vers le bas. À $t = 0$ l'anneau est lancé du point le plus bas du cercle avec une vitesse $\vec{v}_0$ tangente au cercle. Il n'y a pas de frottements. Déterminer l'énergie potentielle de l'anneau en fonction de l'angle $\theta = (\widehat{Oz, \vec{OM}})$ et en déduire l'expression de sa vitesse. On prendra l'énergie potentielle nulle pour $\theta = 0$.

☐ a. $E_p = mgb(1 - \cos \theta)$ ☐ b. $E_p = -mgb \sin \theta$

☐ c. $v = \sqrt{v_0^2 + 2gb(\cos \theta - 1)}$ ☐ d. $v = \sqrt{v_0^2 - 2gb \sin \theta}$

- 12** Un point matériel M de masse m se déplace sans frottement sur l'axe Ox horizontal. Il est accroché à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_v dont l'autre extrémité est fixée au point O . Déterminer l'expression de l'énergie potentielle élastique en fonction de x , k et l_v de façon qu'elle soit nulle pour le ressort à vide.

En déduire la longueur maximale du ressort si à $t = 0$, $x = 2l_v$ et $\|\vec{v}\| = l_v \sqrt{\frac{k}{m}}$.

☐ a. $E_p = kx(x - l_v)$ ☐ b. $E_p = \frac{1}{2}k(x - l_v)^2$

☐ c. $l_{\max} = 2l_v$ ☐ d. $l_{\max} = l_v(1 + \sqrt{2})$

- 13** Un satellite de masse m assimilé à un point matériel est sur une trajectoire plane dans le plan équatorial terrestre ; il est soumis à la force de gravitation $\vec{F} = -\frac{mg_0 R_T^2}{\rho^2} \vec{u}_\rho$ en coordonnées polaires dans ce plan (R_T est le rayon terrestre, g_0 est la norme du champ de gravitation à la surface de la Terre). Déterminer

le travail élémentaire $\delta W_{\vec{F}}$ et en déduire l'énergie potentielle dont dérive $\vec{F}$ en considérant qu'elle est nulle à très grande distance.

$$\square \text{ a. } \delta W_{\vec{F}} = -\frac{mg_0 R_T^2}{\rho^2} d\rho \quad \square \text{ b. } \delta W_{\vec{F}} = \frac{mg_0 R_T^2}{\rho^2} d\rho$$

$$\square \text{ c. } E_p = -\frac{mg_0 R_T^2}{\rho} \quad \square \text{ d. } E_p = \frac{mg_0 R_T^2}{\rho}$$

- 14** Le satellite de la question 13 est sur une trajectoire circulaire de rayon R . En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer sa vitesse et en déduire l'expression de son énergie mécanique.

$$\square \text{ a. } v = R \sqrt{\frac{g_0}{R_T}} \quad \square \text{ b. } v = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R}}$$

$$\square \text{ c. } E_M = -\frac{mg_0 R_T^2}{2R} \quad \square \text{ d. } E_M = \frac{mg_0 R_T^2}{2R}$$

Voir corrigés page 163

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

- La détermination de la position d'équilibre d'un système
- L'étude de sa stabilité
- L'équation du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication.

Notations. Dans tout le chapitre le référentiel d'étude est supposé galiléen.

$\vec{g}$ désigne le champ de pesanteur, considéré comme uniforme et constant.

On note O l'origine du repère, $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ les vecteurs unitaires du repère cartésien lié au référentiel d'étude, $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ les vecteurs unitaires du repère local cylindrique.

1 Conditions d'équilibre

- ☐ V ☐ F **a.** Si la somme des forces est nulle un système est nécessairement en équilibre.
- ☐ V ☐ F **b.** Quand les forces sont conservatives, on peut déterminer la position d'équilibre grâce à l'énergie potentielle.

2 Équilibre stable

- ☐ V ☐ F **a.** Un équilibre est d'autant plus stable que son énergie potentielle est grande.
- ☐ V ☐ F **b.** Dans le cas de forces conservatives, si on écarte légèrement un système d'une position d'équilibre stable, il tend à effectuer des oscillations autour de cette position.

Consignes

QCM

Il peut y avoir, pour certaines questions, deux propositions exactes.

- 3** Deux points A et B de l'axe horizontal Ox sont distants de D . Un point matériel M de masse m est relié à A par un fil inextensible de longueur $L > \frac{D}{2}$ et à B par un fil inextensible de même longueur L . On note $\vec{T}_A$ la tension exercée sur M par le fil accroché en A et $\vec{T}_B$ la tension exercée sur M par le fil accroché en B . On suppose la masse des deux fils négligeable. À l'équilibre :

☐ a. $\|\vec{T}_A\| = \frac{mg}{2}$ ☐ b. $\|\vec{T}_A\| = \frac{mgL}{2D}$
☐ c. $\|\vec{T}_A\| = \frac{mgL}{D}$ ☐ d. $\|\vec{T}_A\| = \frac{mgL}{\sqrt{4L^2 - D^2}}$

- 4** Un point matériel M de masse m est suspendu à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_v ; déterminer la longueur du ressort à l'équilibre l_{eq} et la période des oscillations autour de la position d'équilibre.

☐ a. $l_{eq} = l_v - \frac{mg}{k}$ ☐ b. $l_{eq} = l_v + \frac{mg}{k}$
☐ c. $T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$ ☐ d. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

- 5** Un point matériel M de masse m est posé sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Déterminer les composantes de la réaction à l'équilibre.

☐ a. $|R_n| = mg \sin \alpha$ ☐ b. $|R_n| = mg \cos \alpha$
☐ c. $|R_t| = mg \sin \alpha$ ☐ d. $|R_t| = mg \cos \alpha$

- 6** Un point matériel M de masse m est posé sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Il est fixé au bout d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_v dont l'autre extrémité est le point O en haut du plan. Les frottements sont supposés négligeables. Déterminer la longueur du ressort à l'équilibre l_{eq} et le module de la réaction $\|\vec{R}\|$ exercée par le support.

☐ a. $l_{eq} = l_v + \frac{mg \sin \alpha}{k}$ ☐ b. $l_{eq} = l_v + \frac{mg \cos \alpha}{k}$
☐ c. $\|\vec{R}\| = mg \sin \alpha$ ☐ d. $\|\vec{R}\| = mg \cos \alpha$

- 7** Deux ressorts de masse négligeable, de raideur k et de longueur à vide $\frac{l_v}{2}$ sont fixés entre 2 points A et B de l'axe Ox horizontal d'abscisses respectives $-\frac{l_v}{2}$ et $\frac{l_v}{2}$. On ajoute entre les deux ressorts un point M de masse m .
Pour quelle valeur de m la longueur totale du ressort à l'équilibre est-elle égale à $\frac{3}{2}l_v$?

☐ a. $m = \frac{kl_v}{2g}$ ☐ b. $m = \frac{kl_v}{3g}$
☐ c. $m = \frac{kl_v \sqrt{5}}{6g}$ ☐ d. $m = \frac{kl_v \sqrt{5}}{5g}$

- 8** Un point matériel M de masse m peut se déplacer sur l'axe Ox horizontal. Il est lié à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_v dont l'autre extrémité est fixée en A sur l'axe Oz vertical, à une distance H au-dessus du point O . On suppose qu'il n'y a pas de frottements. Déterminer la valeur x_{eq} à l'équilibre dans le cas où $l_v < H$. Étudier la stabilité de l'équilibre à l'aide d'un raisonnement énergétique.

☐ a. $x_{eq} = 0$ ☐ b. $x_{eq} = \sqrt{H^2 - l_v^2}$
☐ c. L'équilibre est stable. ☐ d. L'équilibre est instable.

- 9** Un point matériel M de masse m peut se déplacer sur l'axe Ox horizontal. Il est lié à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_v dont l'autre extrémité est fixée en A sur l'axe Oz vertical, à une distance H au-dessus du point O . On suppose qu'il n'y a pas de frottements. Déterminer la position d'équilibre stable dans le cas où $l_v > H$.

☐ a. $x_{eq} = 0$ ☐ b. $x_{eq} = l_v$
☐ c. $x_{eq} = \sqrt{l_v^2 - H^2}$ ☐ d. $x_{eq} = \sqrt{l_v^2 + H^2}$

- 10** Un point matériel M de masse m est fixé à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur L . Sa position est repérée grâce à l'angle θ entre l'axe Oz vertical descendant et le vecteur $\overrightarrow{OM}$. Le point M est lâché sans vitesse initiale. Déterminer la fréquence f des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable.

☐ a. $f = \sqrt{\frac{g}{L}}$ ☐ b. $f = 2\pi \sqrt{\frac{g}{L}}$
☐ c. $f = \sqrt{\frac{g}{2\pi L}}$ ☐ d. $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$

- 11** Un point matériel M de masse m est posé sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Il est fixé à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur L dont l'autre extrémité est un point O en haut du plan. Les frottements sont supposés négligeables. Déterminer la tension du fil à l'équilibre et la pulsation des petites oscillations autour de la position d'équilibre.

☐ a. $\|\vec{T}\| = mg \sin \alpha$ ☐ b. $\|\vec{T}\| = mg \cos \alpha$

☐ c. $\omega_0 = \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{L}}$ ☐ d. $\omega_0 = \sqrt{\frac{g \cos \alpha}{L}}$

- 12** Un point matériel M de masse m peut se déplacer le long d'un profil ondulé d'équation $z = b \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right)\right)$, l'axe Oz étant dirigé suivant la verticale ascendante et l'axe Ox étant horizontal. Déterminer les valeurs de x correspondant à des positions d'équilibre stables ainsi que la période T des oscillations autour de ces positions. On supposera qu'il n'y a pas de frottements.

☐ a. $x = n\lambda$ avec $n \in \mathbb{Z}$ ☐ b. $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$ avec $n \in \mathbb{Z}$

☐ c. $T = 2\pi \sqrt{\frac{\sqrt{b\lambda}}{g}}$ ☐ d. $T = \frac{\lambda}{\sqrt{gb}}$

- 13** Un point matériel M de masse m peut se déplacer sur l'axe Ox horizontal. Il n'y a pas de frottements. Son énergie potentielle est de la forme $E_p = \frac{k}{2x^2} - \frac{c}{x}$ où k et c sont des constantes positives. Déterminer la position d'équilibre repérée par x_{eq} et étudier sa stabilité.

☐ a. $x_{eq} = \frac{k}{2c}$ ☐ b. $x_{eq} = \frac{k}{c}$

☐ c. L'équilibre est stable. ☐ d. L'équilibre est instable.

- 14** Un point matériel M de masse m peut se déplacer sur l'axe Ox horizontal. Il n'y a pas de frottements. Son énergie potentielle est de la forme $E_p = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{c}{x}$ où k et c sont des constantes positives. Déterminer la position d'équilibre repérée par x_{eq} et la pulsation des petites oscillations autour de la position d'équilibre.

☐ a. $x_{eq} = \left(\frac{2c}{k}\right)^{\frac{1}{3}}$ ☐ b. $x_{eq} = \left(\frac{c}{k}\right)^{\frac{1}{3}}$

☐ c. $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ ☐ d. $\omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$

Voir corrigés page 170

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

- Oscillateur harmonique en régime libre.
- Oscillateur amorti en régime libre.
- Oscillateur en régime forcé.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication.

Notations. Dans tout le chapitre, k est la raideur du ressort, l_v sa longueur à vide.

1 Oscillateurs harmoniques

☐ V ☐ F **a.** Soit un point matériel de masse m suspendu à un ressort. Comme pour le mouvement horizontal sur un guide sans frottement, la période des oscillations verticales est égale à $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

☐ V ☐ F **b.** Soit un point matériel accroché au bout d'un fil inextensible de longueur L . Le point matériel est lâché sans vitesse initiale. On suppose que le fil reste tendu et que la résistance de l'air est négligeable. L'équation différentielle pour les petites oscillations au voisinage de la position d'équilibre stable est alors : $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$.

☐ V ☐ F **c.** L'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique est proportionnelle à l'amplitude des oscillations.

2 Oscillateurs amortis

☐ V ☐ F **a.** L'amplitude des oscillations libres d'un oscillateur réel décroît à cause des frottements.

☐ V ☐ F **b.** L'amplitude des oscillations forcées d'un oscillateur amorti est maximale quand la force appliquée a pour fréquence la fréquence propre du système.

Consignes

QCM

Il peut y avoir, pour certaines questions, deux propositions exactes.

- 3** Deux ressorts de même longueur à vide l_v et de même raideur k sont mis bout à bout. Le premier ressort est fixé au point O , origine du repère. Le deuxième ressort est fixé au point A de l'axe horizontal Ox . La distance $OA = L$ entre les deux extrémités est fixe. Un point matériel M de masse m est accroché au point de jonction des deux ressorts et se déplace sans frottement sur l'axe Ox . Soit

$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. La pulsation propre de l'oscillateur harmonique obtenu est :

- ☐ a. $\frac{\omega_1}{2}$ ☐ b. $\frac{\omega_1}{\sqrt{2}}$ ☐ c. $\sqrt{2}\omega_1$ ☐ d. $2\omega_1$

- 4** Deux ressorts de même longueur à vide l_v et de même raideur k sont mis bout à bout. Le premier ressort est fixé au point O , origine du repère. Un point matériel M de masse m est fixé à l'extrémité de l'ensemble et se déplace sur l'axe Ox

horizontal. Il n'y a pas de frottements. On pose $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. La pulsation propre de l'oscillateur harmonique obtenu est :

- ☐ a. $\frac{\omega_1}{2}$ ☐ b. $\frac{\omega_1}{\sqrt{2}}$ ☐ c. $\sqrt{2}\omega_1$ ☐ d. $2\omega_1$

- 5** Un point matériel M de masse m en mouvement sur l'axe Ox horizontal est soumis à l'action d'un ressort de raideur k accroché en O . Sachant qu'à $t = 0$ l'allongement du ressort est égal à b et que le point matériel est lancé avec une vitesse initiale v_0 , déterminer l'amplitude A des oscillations.

- ☐ a. $A = b$ ☐ b. $A = \frac{v_0}{\omega_0}$
- ☐ c. $A = b + \frac{v_0}{\omega_0}$ ☐ d. $A = \sqrt{b^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$

- 6** Déterminer l'énergie du système de la question 5 en fonction de l'amplitude A des oscillations.

- ☐ a. $E_M = 2kA$ ☐ b. $E_M = \frac{kA}{2}$
- ☐ c. $E_M = \frac{1}{2}kA^2$ ☐ d. $E_M = 2kA^2$

- 7** Un point matériel M de masse m en mouvement sur l'axe Ox horizontal est soumis à l'action d'un ressort de raideur k accroché en un point A de l'axe Ox . À $t = 0$ l'allongement du ressort est nul et le point matériel est immobile. On posera $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Pour $t > 0$ le point A est animé d'un mouvement horizontal : $x_A = b \sin(\omega t)$ avec par hypothèse $\omega \neq \omega_0$. Déterminer l'équation différentielle du mouvement sachant qu'il n'y a pas de frottements.

☐ a. $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 l_v$
☐ b. $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 (b \sin(\omega t) + l_v)$

☐ c. $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega^2 (b \sin(\omega t) + l_v)$
☐ d. $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega^2 b \sin(\omega t) + \omega_0^2 l_v$

- 8** En reprenant les hypothèses de la question 7, déterminer l'élongation du ressort $X(t) = x(t) - l_v$.

☐ a. $X(t) = \frac{b\omega_0 (\omega \sin \omega_0 t - \omega_0 \sin \omega t)}{\omega^2 + \omega_0^2}$

☐ b. $X(t) = \frac{b\omega_0 (\omega \sin \omega_0 t + \omega_0 \sin \omega t)}{\omega^2 + \omega_0^2}$

☐ c. $X(t) = \frac{b\omega_0 (\omega \sin \omega_0 t + \omega_0 \sin \omega t)}{\omega^2 - \omega_0^2}$

☐ d. $X(t) = \frac{b\omega_0 (\omega \sin \omega_0 t - \omega_0 \sin \omega t)}{\omega^2 - \omega_0^2}$

- 9** Un point matériel M de masse m en mouvement sur l'axe Ox horizontal est soumis à l'action d'un ressort de raideur k accroché en O ainsi qu'à une force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$. Écrire l'équation du mouvement, la mettre sous forme canonique et en déduire suivant la valeur de $Q_0 = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$ la condition pour qu'il y ait des oscillations amorties.

☐ a. $Q_0 < \frac{1}{2}$
☐ b. $Q_0 > \frac{1}{2}$

☐ c. $Q_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$
☐ d. $Q_0 > \frac{1}{\sqrt{2}}$

- 10** Un point matériel M de masse m en mouvement sur l'axe Ox horizontal est soumis à l'action d'un ressort de raideur k accroché en O ainsi qu'à une force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ avec $\alpha = \sqrt{km}$. Sachant qu'à $t = 0$ l'allongement

du ressort est nul et que le point matériel est lancé avec une vitesse initiale v_0 , déterminer l'allongement du ressort en fonction du temps.

☐ a. $X(t) = \frac{2v_0}{\sqrt{3}\omega_0} e^{-\frac{\omega_0 t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\omega_0 t}{2}\right)$ ☐ b. $X(t) = \frac{v_0}{\omega_0} e^{-\frac{\omega_0 t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\omega_0 t}{2}\right)$

☐ c. $X(t) = \frac{v_0}{\sqrt{3}\omega_0} e^{-\frac{\omega_0 t}{2}} \operatorname{sh}\left(\sqrt{3}\omega_0 t\right)$ ☐ d. $X(t) = \frac{2v_0}{\sqrt{3}\omega_0} e^{-\frac{\omega_0 t}{2}} \operatorname{sh}\left(\sqrt{3}\omega_0 t\right)$

- 11** Un point matériel M de masse m en mouvement sur l'axe Ox horizontal est soumis à l'action d'un ressort de raideur k accroché en O ainsi qu'à une force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ avec $\alpha = 4\sqrt{km}$. Sachant qu'à $t = 0$, l'allongement du ressort est nulle et que le point matériel est lancé avec une vitesse initiale v_0 , déterminer l'allongement du ressort en fonction du temps.

☐ a. $X(t) = \frac{2v_0}{\sqrt{3}\omega_0} e^{-2\omega_0 t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\omega_0 t}{2}\right)$ ☐ b. $X(t) = \frac{v_0}{\omega_0} e^{-2\omega_0 t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\omega_0 t}{2}\right)$

☐ c. $X(t) = \frac{v_0}{\sqrt{3}\omega_0} e^{-2\omega_0 t} \operatorname{sh}\left(\sqrt{3}\omega_0 t\right)$ ☐ d. $X(t) = \frac{2v_0}{\sqrt{3}\omega_0} e^{-2\omega_0 t} \operatorname{sh}\left(\sqrt{3}\omega_0 t\right)$

- 12** Un point matériel M de masse m en mouvement sur l'axe Ox horizontal est soumis à l'action d'un ressort accroché en O ainsi qu'à une force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ et à une force $\vec{F} = F_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$. On pose $X = x - l_v$ et $\underline{X}(t) = X_0 \exp(j(\omega t + \varphi))$ et $\underline{X}_0 = X_0 \exp(j\varphi)$. Écrire l'équation du mouvement et en déduire la relation vérifiée par $\underline{X}_0$.

☐ a. $\underline{X}_0(k + \omega^2 m + \alpha j\omega) = F_0$ ☐ b. $\underline{X}_0(k - \omega^2 m + \alpha j\omega) = F_0$

☐ c. $\underline{X}_0(k + \omega^2 m + \alpha\omega) = F_0$ ☐ d. $\underline{X}_0(k - \omega^2 m + \alpha\omega) = F_0$

- 13** Déterminer la condition de résonance d'élongation pour l'oscillateur décrit à la question 12.

☐ a. $\alpha < \sqrt{\frac{mk}{2}}$ ☐ b. $\alpha > \sqrt{\frac{mk}{2}}$

☐ c. $\alpha < \sqrt{2mk}$ ☐ d. $\alpha > \sqrt{2mk}$

- 14** Déterminer la pulsation de résonance de vitesse ω_1 pour cet oscillateur.

☐ a. $\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ ☐ b. $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

☐ c. $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}}$ ☐ d. $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{2m^2}}$

Voir corrigés page 178

Théorème du moment cinétique

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

- Moment d'une force
- Moment cinétique d'un point matériel
- Théorème du moment cinétique
- Application aux forces centrales

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication.

1 Moment d'une force

- ☐ V ☐ F a. Le moment par rapport à un point A d'une force $\vec{F}$ appliquée à un point matériel M est défini par $\vec{M}_A = \vec{AM} \wedge \vec{F}$.
- ☐ V ☐ F b. Le moment par rapport à un point A d'une force $\vec{F}$ appliquée à un point matériel M ne dépend que de la norme de la force et de la distance AM .
- ☐ V ☐ F c. Le moment par rapport à un point A d'une force $\vec{F}$ appliquée à un point matériel M donne une indication sur le sens de la rotation autour de A induite par la force $\vec{F}$.

2 Moment cinétique

- ☐ V ☐ F a. Le moment cinétique d'un point matériel M de masse m par rapport à un point A est défini par $\vec{L}_A = m\vec{v} \wedge \vec{AM}$.
- ☐ V ☐ F b. Le moment cinétique d'un point matériel M de masse m par rapport à un axe Δ de vecteur unitaire $\vec{u}$ et passant par le point A est défini par $L_\Delta = L_A \cdot \vec{u}$.

☐ V ☐ F c. Le moment cinétique d'un point matériel M de masse m par rapport à un axe Δ de vecteur unitaire $\vec{u}$ ne dépend pas du point de l'axe choisi pour effectuer le calcul.

3 Théorème du moment cinétique

☐ V ☐ F a. D'après le théorème du moment cinétique dans un référentiel galiléen, la dérivée du moment cinétique par rapport à un point A quelconque est égal à la somme des moments des forces par rapport à A .

☐ V ☐ F b. Si les droites d'action de toutes les forces appliquées à un point matériel M passent par le point A fixe du référentiel d'étude galiléen, il y a conservation du moment cinétique de M par rapport au point A .

Consignes

QCM

Il peut y avoir, pour certaines questions, deux propositions exactes.

4 Déterminer en coordonnées cylindriques la composante L_z du moment cinétique d'un point matériel M de masse m par rapport à l'origine O du repère.

- ☐ a. $L_z = m\rho \frac{d\theta}{dt}$ ☐ b. $L_z = m\rho^2 \frac{d\theta}{dt}$
☐ c. $L_z = m\rho \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ ☐ d. $L_z = m \left(\rho \frac{d\theta}{dt}\right)^2$

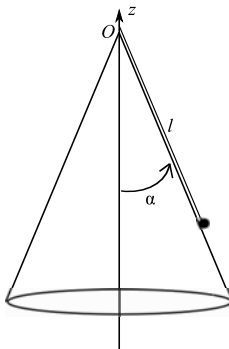
5 Un point matériel M de masse m est fixé au bout d'un fil inextensible de masse négligeable et de longueur l . L'autre extrémité du fil est accrochée à un point O fixe. Déterminer le moment $\vec{M}_O$ par rapport à O de la tension $\vec{T}$ du fil et le moment $\vec{M}'_O$ du poids $m\vec{g}$. On fera intervenir l'angle θ entre le fil supposé tendu et la verticale Ox descendante.

- ☐ a. $\vec{M}_O = \vec{0}$ ☐ b. $\vec{M}_O = \|\vec{T}\| l \cos \theta \vec{u}_z$
☐ c. $\vec{M}'_O = mgl \sin \theta \vec{u}_z$ ☐ d. $\vec{M}'_O = -mgl \sin \theta \vec{u}_z$

6 Dédurre des deux questions précédentes l'équation différentielle du mouvement de M dans le cas d'un mouvement circulaire de rayon l .

- ☐ a. $l \frac{d^2\theta}{dt^2} - g \sin \theta = 0$ ☐ b. $l \frac{d^2\theta}{dt^2} - g \cos \theta = 0$
☐ c. $l \frac{d^2\theta}{dt^2} + g \sin \theta = 0$ ☐ d. $l \frac{d^2\theta}{dt^2} + g \cos \theta = 0$

- 7 Un point matériel M de masse m est accroché à un fil inextensible de masse négligeable et de longueur l . L'autre extrémité du fil est accrochée à un point O fixe. M se déplace sans frottement sur un cône d'axe vertical Oz , de sommet O , de demi-angle au sommet α .



On suppose que le fil reste tendu au cours du mouvement et que le point matériel reste en contact avec le cône. Soit ω la vitesse angulaire de rotation de M autour de l'axe Oz . Déterminer le moment cinétique de M par rapport à Oz .

- ☐ a. $L_z = ml^2 \omega \sin \alpha$ ☐ b. $L_z = ml^2 \omega \sin 2\alpha$
☐ c. $L_z = m(l \sin \alpha)^2 \omega$ ☐ d. $L_z = m(l \cos \alpha)^2 \omega$

- 8 Dans la configuration de la question 7, déterminer le moment M_z de la réaction du support et le moment M'_z du poids par rapport à l'axe Oz .

- ☐ a. $M_z = 0$ ☐ b. $M_z = \|\vec{R}\| l \tan \alpha$
☐ c. $M'_z = 0$ ☐ d. $M'_z = mgl \sin \alpha$

- 9 Dédurre des deux questions précédentes les caractéristiques du mouvement du point matériel M .

- ☐ a. mouvement uniforme ☐ b. mouvement oscillatoire
☐ c. mouvement circulaire ☐ d. mouvement parabolique

- 10 Soit un point matériel M de masse m soumis à un ensemble de forces dont la résultante $\vec{F}$ passe par le point fixe O . On suppose qu'à l'instant initial, la vitesse $\vec{v}_0$ de M est perpendiculaire à la direction du vecteur $\overrightarrow{OM}_0$, et on appelle xOy le plan contenant ces deux vecteurs. Ultérieurement, on note $r = OM$, θ l'angle polaire des coordonnées cylindriques et v la norme de la vitesse.

- ☐ a. la trajectoire est plane ☐ b. la trajectoire est circulaire

- ☐ c. $v = \frac{\|\overrightarrow{OM}_0\| v_0}{r}$ ☐ d. $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\|\overrightarrow{OM}_0\| v_0}{r^2}$

11 Déterminer l'énergie cinétique E_C du point matériel décrit à la question **10**.

☐ a. $E_C = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$

☐ b. $E_C = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + v_0^2\frac{(OM_0)^2}{r^2}\right]$

☐ c. $E_C = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + v_0^2\frac{r^2}{(OM_0)^2}\right]$

☐ d. $E_C = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - v_0^2\right] + \|\vec{F}\| r$

12 Le point matériel décrit à la question **10** est soumis à une résultante des forces de la forme $\vec{F} = \alpha \frac{\overrightarrow{OM}}{r^3}$. Déterminer l'énergie potentielle E_P de M en la prenant nulle à l'infini par convention.

☐ a. $E_P = -\frac{\alpha}{2r^2}$ ☐ b. $E_P = \frac{\alpha}{2r^2}$

☐ c. $E_P = -\frac{\alpha}{r}$ ☐ d. $E_P = \frac{\alpha}{r}$

13 Dédurre des questions **11** et **12** l'énergie potentielle effective E_{Peff} du point M . On posera $OM_0 = r_0$.

☐ a. $E_{Peff}(r) = mv_0^2 \frac{r_0^2}{2r^2} + \frac{\alpha}{r}$ ☐ b. $E_{Peff}(r) = mv_0^2 \frac{r_0^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r}$

☐ c. $E_{Peff}(r) = mv_0^2 \frac{r^2}{2r_0^2} + \frac{\alpha}{r}$ ☐ d. $E_{Peff}(r) = mv_0^2 \frac{r^2}{2r_0^2} - \frac{\alpha}{r}$

14 Dans le cas où $\vec{F} = \alpha \frac{\overrightarrow{OM}}{r^3}$ avec $\alpha < 0$:

☐ a. La force est attractive.

☐ b. La force est répulsive.

☐ c. $E_{Peff}(r)$ présente un maximum.

☐ d. $E_{Peff}(r)$ présente un minimum.

15 À l'instant $t = 0$, $v_0 = \sqrt{\frac{|\alpha|}{mr_0}}$. Déterminer l'énergie potentielle effective initiale, l'énergie mécanique et la forme de la trajectoire de M .

☐ a. $E_M = 0$

☐ b. $E_M = \frac{\alpha}{2r_0}$

☐ c. trajectoire circulaire

☐ d. trajectoire parabolique

Voir corrigés page 186

Mouvements dans un champ newtonien

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

- Force gravitationnelle et énergie potentielle de gravitation.
- Nature de la trajectoire.
- Trajectoires circulaires et elliptiques, lois de Kepler.
- Interaction coulombienne.

Consignes

QCM

Il peut y avoir, pour certaines questions, deux propositions exactes.

Les questions 8, 10, 11, 12 et 13 ne sont pas au programme de PTSI.

Notations. Pour toutes les applications numériques demandées, on prendra les valeurs approchées : $g_0 = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ (accélération de la pesanteur à la surface de la Terre), $R_T = 6\,371 \text{ km}$ (rayon terrestre), $T_0 = 23 \text{ h } 56 \text{ min}$ (durée du jour sidéral).

On note G la constante de gravitation universelle et M_T la masse de la Terre.

MPSI. On rappelle que l'équation d'une ellipse en coordonnées cylindriques est de la forme $\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ avec $e < 1$, l'axe polaire Ox étant orienté du foyer O vers le péricée (p est le paramètre de l'ellipse, e est l'excentricité).

Si $c = \rho^2 \frac{d\theta}{dt}$ est la constante des aires et $u = \frac{1}{\rho}$, l'accélération radiale est égale à

$$a_\rho = -c^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \text{ (formule de Binet pour l'accélération).}$$

- 1** Déterminer l'expression de l'énergie potentielle d'un point matériel de masse m soumis à l'attraction d'une planète de masse M_P . On notera r la distance entre le centre de la planète et le point matériel.

☐ a. $E_P = -\frac{GmM_P}{r}$ ☐ b. $E_P = \frac{GmM_P}{r}$

☐ c. $E_P = -\frac{GmM_P}{r^2}$ ☐ d. $E_P = \frac{GmM_P}{r^2}$

- 2** Un satellite est en mouvement circulaire autour de la Terre. Le rayon de son orbite étant égal à R , déterminer sa vitesse v dans le référentiel géocentrique.

☐ a. $v = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R}}$ ☐ b. $v = R_T \sqrt{\frac{g_0}{2R}}$

☐ c. $v = R \sqrt{\frac{g_0}{R_T}}$ ☐ d. $v = R \sqrt{\frac{2g_0}{R_T}}$

- 3** Déterminer l'énergie E_M d'un satellite de masse m sur une orbite circulaire de rayon R autour de la Terre.

☐ a. $E_M = -m \frac{g_0 R_T^2}{2R}$ ☐ b. $E_M = -m \frac{g_0 R_T^2}{R}$

☐ c. $E_M = -m \frac{2g_0 R_T^2}{R}$ ☐ d. $E_M = -m \frac{g_0 R_T^2}{\sqrt{2}R}$

- 4** Quelle est la relation entre la période de révolution T d'un satellite sur une orbite circulaire autour de la Terre et le rayon R de cette orbite ?

☐ a. $T^2 = 2 \left(\frac{\pi}{R} \right)^2 \frac{R_T^3}{g_0}$ ☐ b. $T^2 = \left(\frac{2\pi}{R} \right)^2 \frac{R_T^3}{g_0}$

☐ c. $T^2 = 2 \left(\frac{\pi}{R_T} \right)^2 \frac{R^3}{g_0}$ ☐ d. $T^2 = \left(\frac{2\pi}{R_T} \right)^2 \frac{R^3}{g_0}$

- 5** Déterminer la période de révolution T et l'altitude h par rapport au niveau de la mer d'un satellite géostationnaire.

☐ a. $T = 24h$ ☐ b. $T = T_0 = 23 \text{ h } 56 \text{ min}$

☐ c. $h = 35,8 \cdot 10^6 \text{ m}$ ☐ d. $h = 42,1 \cdot 10^6 \text{ m}$

- 6** D'où vaut-il mieux lancer un satellite artificiel ?

☐ a. d'un des pôles ☐ b. d'un des tropiques
☐ c. de l'équateur ☐ d. Cela n'a pas d'importance.

- 7** Quelle est, dans le référentiel géocentrique, la vitesse v_l de libération d'un satellite ?

☐ a. $v_l = 178 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ☐ b. $v_l = 356 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

☐ c. $v_l = 7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ ☐ d. $v_l = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

- 8** Un satellite est sur une trajectoire circulaire autour de la Terre. Que se passe-t-il si on double sa vitesse sans changer sa direction au moment du passage en un point M_0 ?
- ☐ a. La trajectoire devient elliptique, de périégée M_0 .
 - ☐ b. La trajectoire devient elliptique, d'apogée M_0 .
 - ☐ c. La trajectoire devient parabolique, de sommet M_0 .
 - ☐ d. La trajectoire devient hyperbolique, de sommet M_0 .
- 9** Déterminer le rapport des masses M_T de la Terre et M_S du Soleil, sachant que la période de révolution de la Terre autour du Soleil est $T_1 = 365,25$ jours et que celle de la Lune autour de la Terre est $T_2 = 27,32$ jours. On considérera des trajectoires de rayon moyen $R_1 = 149,6 \cdot 10^6$ km pour la Terre autour du Soleil et de rayon moyen $R_2 = 384,4 \cdot 10^3$ km pour la Lune autour de la Terre.
- ☐ a. $\frac{M_S}{M_T} = 1,1 \cdot 10^5$ ☐ b. $\frac{M_S}{M_T} = 2,2 \cdot 10^5$
 - ☐ c. $\frac{M_S}{M_T} = 3,3 \cdot 10^5$ ☐ d. $\frac{M_S}{M_T} = 4,4 \cdot 10^5$
- 10** L'orbite terrestre autour du Soleil est une ellipse d'excentricité $e = 0,0167$. Déterminer le rapport des vitesses de la Terre v_P au périhélie (point de l'orbite le plus proche du Soleil) et v_A à l'aphélie (point le plus éloigné du Soleil) dans le référentiel héliocentrique.
- ☐ a. $\frac{v_P}{v_A} = 1,068$ ☐ b. $\frac{v_P}{v_A} = 1,034$
 - ☐ c. $\frac{v_P}{v_A} = 1,017$ ☐ d. $\frac{v_P}{v_A} = 0,967$
- 11** Un satellite artificiel de masse m est lancé depuis un point M_0 tel que $OM_0 = r_0$; sa vitesse dans le référentiel géocentrique est orthoradiale et de norme v_0 égale à la moitié de celle qui lui donnerait une trajectoire circulaire à partir de la même position initiale. Déterminer l'énergie mécanique et le moment cinétique du satellite dans le référentiel géocentrique.
- ☐ a. $E_M = -\frac{3}{8}mR_T^2\frac{g_0}{r_0}$ ☐ b. $E_M = -\frac{7}{8}mR_T^2\frac{g_0}{r_0}$
 - ☐ c. $L_0 = mR_T\sqrt{r_0g_0}$ ☐ d. $L_0 = \frac{m}{2}R_T\sqrt{r_0g_0}$
- 12** Déterminer le paramètre p de la trajectoire du satellite décrit à la question 11.
- ☐ a. $p = r_0$ ☐ b. $p = \frac{r_0}{2}$
 - ☐ c. $p = \frac{r_0}{4}$ ☐ d. $p = \frac{r_0}{8}$

- 13** En utilisant les caractéristiques de la vitesse au périgée et à l'apogée d'une trajectoire elliptique, établir la relation entre l'énergie et le demi grand axe pour un satellite de masse m en mouvement autour de la Terre.

☐ a. $a = -\frac{mg_0 R_T^2}{2E}$ ☐ b. $a = -\frac{mg_0 R_T^2}{\sqrt{2}E}$
☐ c. $a = -\frac{mg_0 R_T^2}{E}$ ☐ d. $a = -\frac{\sqrt{2}mg_0 R_T^2}{E}$

- 14** Soient deux particules chargées : la première fixe, de charge $Q > 0$, située à l'origine O du repère, la deuxième mobile, de charge $q > 0$. À l'instant initial, la charge mobile, située sur l'axe Ox à une distance D de la charge fixe, a une vitesse $\vec{V}_0$ parallèle à Ox et dirigée vers l'origine. Déterminer l'énergie E_M de la charge mobile et la nature de la trajectoire.

☐ a. $E_M = \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 D}$ ☐ b. $E_M = \frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 D}$
☐ c. trajectoire rectiligne ☐ d. trajectoire hyperbolique

- 15** Avec les hypothèses de la question précédente, déterminer la distance minimale d'approche d_m .

☐ a. $d_m = \frac{D}{1 + \frac{2\pi\epsilon_0 D}{qQ}mV_0^2}$ ☐ b. $d_m = \frac{D}{1 + \frac{4\pi\epsilon_0 D}{qQ}mV_0^2}$
☐ c. $d_m = \frac{D}{1 + \frac{\pi\epsilon_0 D}{qQ}mV_0^2}$ ☐ d. $d_m = \frac{D}{1 + \frac{\pi\epsilon_0 D}{2qQ}mV_0^2}$

Voir corrigés page 193

Cinématique du changement de référentiel

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

- Les notions de référentiel absolu et de référentiel relatif.
- Les lois de composition des vitesses et des accélérations.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication.

Notations. Dans tout le chapitre, on notera R_a le référentiel absolu (supposé fixe) et R_r le référentiel relatif, en mouvement par rapport à R_a .

$OXYZ$ est un repère orthonormé direct lié à R_a (vecteurs de base $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$), $O'xyz$ est un repère orthonormé direct lié à R_r (vecteurs de base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

On étudie le mouvement d'un point matériel M par rapport à l'un et l'autre de ces référentiels.

On note P le point coïncidant au point M .

On appelle vitesse $\vec{v}_a$ (accélération $\vec{a}_a$) absolue la vitesse (l'accélération) par rapport à R_a .

On appelle vitesse $\vec{v}_r$ (accélération $\vec{a}_r$) relative la vitesse (l'accélération) par rapport à R_r .

1 Composition des vitesses et des accélérations

- ☐ V ☐ F a. Le point dit « coïncidant » P est un point fictif immobile dans le référentiel absolu et dont la position à un instant donné est la même que celle de M .

☐ V ☐ F **b.** Quand R_r est en translation, le point coïncident P est forcément en mouvement rectiligne dans R_a .

☐ V ☐ F **c.** La vitesse absolue de M est la somme de sa vitesse relative et de la vitesse absolue du point coïncident (vitesse d'entraînement).

☐ V ☐ F **d.** L'accélération absolue de M est la somme de son accélération relative et de l'accélération absolue du point coïncident (accélération d'entraînement).

2 Référentiel relatif en translation par rapport à R_a

☐ V ☐ F **a.** La vitesse d'entraînement est la même pour tout point en mouvement par rapport à R_r .

☐ V ☐ F **b.** L'accélération d'entraînement est la même pour tout point en mouvement par rapport à R_r .

3 Référentiel relatif en rotation autour d'un axe fixe dans R_a

☐ V ☐ F **a.** La vitesse d'entraînement est la même pour tout point en mouvement par rapport à R_r .

☐ V ☐ F **b.** L'accélération d'entraînement est la même pour tout point en mouvement par rapport à R_r .

Consignes

QCM

Il peut y avoir, pour certaines questions, deux propositions exactes.

4 R_r est en translation rectiligne accélérée par rapport à R_a et $\overrightarrow{OO'} = \alpha t^2 \vec{K}$ où α a une valeur constante positive. On choisit les mêmes vecteurs de base dans les deux référentiels. La vitesse relative vaut $\vec{v}_r = at \vec{I}$ avec a une constante. Déterminer la vitesse absolue et sa norme.

☐ a. $\vec{v}_a = at \vec{I} + \alpha t \vec{K}$ ☐ b. $\vec{v}_a = at \vec{I} + 2\alpha t \vec{K}$

☐ c. $v_a = (a + \alpha)t$ ☐ d. $v_a = t\sqrt{4\alpha^2 + a^2}$

5 Pour le mouvement décrit à la question 4, déterminer l'accélération absolue et sa norme.

☐ a. $\vec{a}_a = 2\alpha \vec{K} + a \vec{I}$ ☐ b. $\vec{a}_a = \alpha \vec{K} + a \vec{I}$

☐ c. $a_a = \sqrt{a^2 + 4\alpha^2}$ ☐ d. $a_a = a + 2\alpha$

- 6** Un point matériel M se déplace dans le sens trigonométrique sur un cercle de centre C et de rayon R à la vitesse v_0 constante par rapport au cercle. Le cercle se translate le long de l'axe OZ à la vitesse $\vec{V}_1 = \alpha_1 t \vec{K}$, α_1 étant une constante.

Le plan du cercle reste à tout instant parallèle au plan XOY . On notera $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{CM}}{R}$

et $\vec{w} = \vec{K} \wedge \vec{u}$. Déterminer la vitesse absolue et sa norme.

☐ a. $\vec{v}_a = v_0 \vec{u} + \alpha_1 t \vec{K}$ ☐ b. $\vec{v}_a = v_0 \vec{w} + \alpha_1 t \vec{K}$

☐ c. $\|\vec{v}_a\| = \sqrt{(v_0)^2 + (\alpha_1 t)^2}$ ☐ d. $\|\vec{v}_a\| = |v_0 + \alpha_1 t|$

- 7** Pour le mouvement décrit à la question 6, déterminer l'accélération absolue et sa norme.

☐ a. $\vec{a}_a = \alpha_1 \vec{K} - \frac{v_0^2}{R} \vec{u}$ ☐ b. $\vec{a}_a = \alpha_1 \vec{K} + \frac{v_0^2}{R} \vec{w}$

☐ c. $\|\vec{a}_a\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \frac{v_0^4}{R^2}}$ ☐ d. $\|\vec{a}_a\| = \left| \alpha_1 - \frac{v_0^2}{R} \right|$

- 8** R_r est en rotation d'axe OZ par rapport à R_a de vecteur rotation $\vec{\omega} = \omega \vec{K}$ où ω a une valeur constante. L'axe Ox lié à R_r est perpendiculaire à $\vec{K}$. La vitesse relative vaut $\vec{v}_r = (v_0 + at) \vec{i}$ avec v_0 et a deux constantes. À $t = 0$, le point M est sur l'axe Ox à une distance D du point O . Déterminer les composantes de la vitesse absolue sur le repère $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

☐ a. $v_{ax} = v_0 + at + \omega D$ ☐ b. $v_{ax} = v_0 + at$

☐ c. $v_{ay} = \left(D + v_0 t + \frac{at^2}{2} \right) \omega$ ☐ d. $v_{ay} = (v_0 t + at^2) \omega$

- 9** Pour le mouvement décrit à la question 8, déterminer les composantes sur le repère $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'accélération absolue.

☐ a. $a_{ax} = a + 2\omega(v_0 + at)$ ☐ b. $a_{ax} = a - \left(D + v_0 t + \frac{at^2}{2} \right) \omega^2$

☐ c. $a_{ay} = - \left(D + v_0 t + \frac{at^2}{2} \right) \omega^2$ ☐ d. $a_{ay} = 2\omega(v_0 + at)$

- 10** Un cerceau de centre C et de rayon R roule sans glisser sur le plan horizontal XOY , C décrivant une trajectoire circulaire de rayon b à vitesse V_C constante dans le sens trigonométrique direct par rapport à l'axe Oz . Soit B le point de contact avec le plan OXY . Le cerceau reste à tout instant dans un plan vertical.

On choisit comme référentiel relatif un référentiel en rotation uniforme d'axe OZ , de vitesse angulaire $\Omega = \frac{V_C}{b}$. On notera $\vec{i} = \frac{\vec{OB}}{b}$ et $\vec{j} = \vec{K} \wedge \vec{i}$. Soit D le point du cerceau diamétralement opposé à B .

- ☐ a. le mouvement relatif de D est circulaire de rayon b .
- ☐ b. le mouvement relatif de D est circulaire de rayon R .
- ☐ c. la vitesse angulaire du mouvement relatif est égale à $\frac{V_C}{R}$
- ☐ d. la vitesse angulaire du mouvement relatif est égale à $\frac{V_C}{b}$

Les questions 11 à 13 utilisent les hypothèses de la question 10.

11 Déterminer les composantes de la vitesse absolue de D .

- ☐ a. $\vec{v}_a = 2V_C \vec{j}$
- ☐ b. $\vec{v}_a = V_C (\vec{j} + \vec{K})$
- ☐ c. $\vec{v}_a = V_C (\vec{j} - \vec{K})$
- ☐ d. $\vec{v}_a = \vec{0}$

12 Déterminer les composantes de l'accélération absolue de D .

- ☐ a. $\vec{a}_a = -\frac{3V_C^2}{b} \vec{i} - \frac{V_C^2}{R} \vec{K}$
- ☐ b. $\vec{a}_a = -4\frac{V_C^2}{R} \vec{i}$
- ☐ c. $\vec{a}_a = \vec{0}$
- ☐ d. $\vec{a}_a = -\frac{3V_C^2}{b} \vec{i} + \frac{V_C^2}{R} \vec{K}$

13 Déterminer les composantes de l'accélération absolue de B .

- ☐ a. $\vec{a}_a = \frac{V_C^2}{b} \vec{i} + \frac{V_C^2}{R} \vec{K}$
- ☐ b. $\vec{a}_a = \frac{V_C^2}{R} \vec{i} + \frac{V_C^2}{b} \vec{K}$
- ☐ c. $\vec{a}_a = \vec{0}$
- ☐ d. $\vec{a}_a = \frac{2V_C^2}{b} \vec{i}$

Voir corrigés page 199

Référentiels non galiléens

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

- Les référentiels en translation ou en rotation à vitesse angulaire constante par rapport à un référentiel galiléen.
- Les forces d'inertie d'entraînement et les forces d'inertie de Coriolis.
- Le référentiel terrestre.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication.

Notations. Dans tout ce chapitre, sauf indication contraire, le référentiel galiléen sera noté R et le référentiel en mouvement R' .

1 Généralités

- ☐ V ☐ F **a.** Dans R' en translation rectiligne uniforme par rapport à R , les forces d'inertie sont nulles.
- ☐ V ☐ F **b.** Dans R' en rotation par rapport à R , la force d'inertie d'entraînement est centripète.
- ☐ V ☐ F **c.** Dans R' en rotation par rapport à R , tous les points subissent la force d'inertie de Coriolis.
- ☐ V ☐ F **d.** Le référentiel géocentrique a un mouvement de rotation par rapport au référentiel héliocentrique.
- ☐ V ☐ F **e.** C'est Léon Foucault qui a mis en évidence expérimentalement que le référentiel terrestre n'est pas galiléen.

Consignes

QCM

Il peut y avoir, pour certaines questions, deux propositions exactes.

Les questions 9 à 13 seront traitées comme un approfondissement du cours.

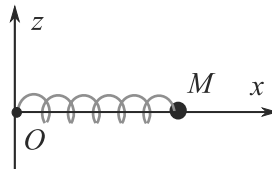
- 2** On considère un wagon (référentiel R') auquel est lié le repère (O, x, y, z) avec le plan Oxy horizontal et l'axe Oz orienté vers le haut. Le référentiel R' se déplace avec une accélération constante $\vec{a} = -a\vec{u}_x$ par rapport au référentiel R . Une personne fixe en O dans R' lance une balle (masse m) verticalement depuis le point O avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_z$. Déterminer la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie}$ et la force d'inertie de Coriolis $\vec{f}_{ic}$ s'exerçant sur la balle dans R' .

- ☐ a. $\vec{f}_{ie} = -ma\vec{u}_x$ ☐ b. $\vec{f}_{ie} = ma\vec{u}_x$
☐ c. $\vec{f}_{ic} = \vec{0}$ ☐ d. $\vec{f}_{ic} = -2ma\dot{x}\vec{u}_y$

- 3** Établir les équations $x(t)$ et $z(t)$ du mouvement pour la masse précédente dans R' .

- ☐ a. $x = 0$ ☐ b. $x = \frac{at^2}{2}$
☐ c. $z = -\frac{gt^2}{2} + v_0t$ ☐ d. $z = -\frac{gt^2}{2}$

- 4** Un ressort (k, ℓ_0) est attaché à un point O fixe. Un point M de masse m est attaché à l'extrémité libre du ressort. L'axe Ox est en rotation à la vitesse angulaire ω constante autour d'un axe Oz vertical. On note R' le référentiel lié à Ox et Oy (troisième axe du trièdre direct).



Les forces d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie}$ et de Coriolis $\vec{f}_{ic}$ s'exerçant sur M dans R sont :

- ☐ a. $\vec{f}_{ie} = -m\omega^2 x\vec{u}_x$ ☐ b. $\vec{f}_{ie} = m\omega^2 x\vec{u}_x$
☐ c. $\vec{f}_{ic} = -m\omega\dot{x}\vec{u}_y$ ☐ d. $\vec{f}_{ic} = 2m\omega\dot{x}\vec{u}_y$

5 Déterminer la position d'équilibre de la masse M dans R' .

☐ a. $x'_e = \frac{k\ell_0}{k - m\omega^2}$

☐ b. $x'_e = \ell_0$

☐ c. $x'_e = \frac{-k\ell_0}{k + m\omega^2}$

☐ d. Il n'y a pas de position d'équilibre.

6 Établir l'équation du mouvement pour la masse précédente dans R' et l'expression de la pulsation ω'_0 des oscillations.

☐ a. $m\ddot{x} + kx = kx'_e$

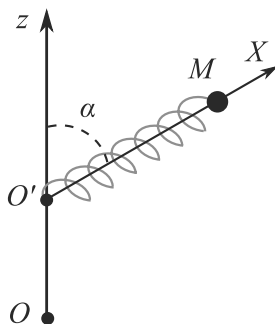
☐ b. $m\ddot{x} + (k - m\omega^2)x = (k - m\omega^2)x'_e$

☐ c. $\omega'_0 = \sqrt{k/m}$

☐ d. $\omega'_0 = \sqrt{(k - m\omega^2)/m}$

7 On étudie un sismographe constitué d'une tige $O'X$, sur laquelle est monté un point M de masse m relié à un ressort (k, ℓ_0). L'axe Oz fixe est lié au référentiel galiléen R et l'axe $O'X$ est lié au référentiel R' . Le point O' a un mouvement oscillatoire dans R : $z_{O'} = a \cos \omega t$. D'autre part, le point M subit une force de frottement visqueux $\vec{f}_f = -h\dot{X}\vec{u}_X$ où $\vec{u}_X$ est un vecteur unitaire de l'axe $O'X$. La position d'équilibre lorsque O' est immobile est $X_e = \ell_0 + \frac{mg \cos \alpha}{k}$. On note $\eta = X - X_e$, l'écart par rapport à l'équilibre.

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par η .



☐ a. $m\ddot{\eta} + h\dot{\eta} + k\eta = 0$

☐ b. $m\ddot{\eta} - h\dot{\eta} - k\eta = m\omega^2 \cos \alpha \cos \omega t$

☐ c. $m\ddot{\eta} + h\dot{\eta} + k\eta = m\omega^2 \cos \alpha \cos \omega t$

☐ d. $m\ddot{\eta} + h\dot{\eta} + k\eta = -m\omega^2 \cos \alpha \cos \omega t$

- 8** On cherche des solutions au régime forcé de la forme $\eta = \eta_0 \cos(\omega t + \phi)$. En utilisant les complexes, et en posant $\underline{\eta} = \underline{\eta_0} e^{i\omega t}$ et $\eta = \text{Re}(\underline{\eta})$, déterminer l'amplitude complexe $\underline{\eta_0} = \eta_0 e^{i\phi}$ et son module η_0 .

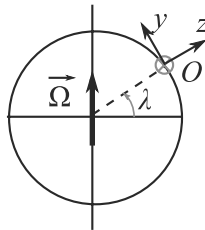
☐ a. $\underline{\eta_0} = \frac{a\omega^2 \cos \alpha}{\frac{k}{m} - \omega^2 + i\frac{h}{m}\omega}$

☐ b. $\underline{\eta_0} = \frac{a\omega^2 \cos \alpha \cos \omega t}{\frac{k}{m} - \omega^2 + i\frac{h}{m}\omega}$

☐ c. $\eta_0 = \frac{a\omega^2 \cos \alpha}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{h}{m}\omega\right)^2}}$

☐ d. $\eta_0 = \frac{a\omega^2 \cos \alpha \cos \omega t}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{h}{m}\omega\right)^2}}$

- 9** On se place dans le référentiel terrestre non galiléen R' en rotation autour de l'axe des pôles à la vitesse angulaire Ω par rapport au référentiel galiléen géocentrique R . On étudie le mouvement d'un point M , de masse m , en un lieu de latitude λ repéré par les axes Ox (vers l'est), Oy (vers le nord), Oz (verticale du lieu passant par le centre de la Terre). On note $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur et H , le projeté du point M sur l'axe des pôles. Faire le bilan des forces s'exerçant sur M dans R' .



- ☐ a. Poids, force d'inertie d'entraînement, force d'inertie de Coriolis.
☐ b. Poids, force d'inertie de Coriolis.
☐ c. Poids, force d'inertie d'entraînement.
☐ d. Poids

- 10** On tire le projectile M à la verticale avec une vitesse $\vec{v_0}$ depuis le point O . Écrire les équations du mouvement en projection sur (O, x, y, z) .

☐ a. $\ddot{x} = 2\Omega(\dot{y} \sin \lambda - \dot{z} \cos \lambda)$ ☐ b. $\ddot{y} = 2\Omega \dot{x} \sin \lambda$

☐ c. $\ddot{z} = 2\Omega \dot{x} \cos \lambda - g$ ☐ d. $\ddot{z} = 2\Omega \dot{x} \cos \lambda$

- 11** Après intégration des équations projetées sur Oy et Oz , écrire l'équation différentielle pour x .

☐ a. $\ddot{x} + 4\Omega^2 x = 2\Omega \cos \lambda g t$

☐ b. $\ddot{x} + 4\Omega^2 x t (\cos \lambda + \sin \lambda) = 2\Omega g t \cos \lambda$

☐ c. $\ddot{x} + 4\Omega^2 x = 2\Omega \cos \lambda (g t - v_0)$

☐ d. $\dot{x} = 2\Omega(-z \cos \lambda + y \sin \lambda)t - 2\Omega v_0 \cos \lambda$

- 12** En négligeant le terme en Ω^2 , déterminer les expressions de $\dot{x}$ et x en fonction du temps.

☐ a. $\dot{x} = 2\Omega \cos \lambda (gt^2 - v_0 t)$
☐ b. $\dot{x} = 2\Omega \cos \lambda \left(\frac{gt^2}{2} - v_0 t \right)$
☐ c. $x = 2\Omega \cos \lambda (gt^3 - v_0 t^2)$
☐ d. $x = \Omega \cos \lambda \left(\frac{gt^3}{3} - v_0 t^2 \right)$

- 13** L'instant de retour au sol est $t_s = 2v_0/g$; en déduire la déviation x_s suivant Ox et celle y_s suivant Oy en négligeant les termes en Ω^2 .

☐ a. $x_s \approx 0$
☐ b. $x_s \simeq -\frac{4}{3}\Omega \frac{v_0^3}{g^2} \cos \lambda$
☐ c. $y_s \approx 0$
☐ d. $y_s \simeq -\frac{16}{3}\Omega^2 \frac{v_0^4}{g^3} \cos \lambda \sin \lambda$

Voir corrigés page [205](#)

Système de deux points matériels (MPSI)

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

- Les systèmes de deux points en interaction isolés ou non.
- La notion de référentiel barycentrique.
- La notion de forces intérieures et extérieures.
- Le travail des forces intérieures.
- L'énergie d'un système de deux points et l'énergie potentielle d'interaction.
- La notion de particule fictive permettant l'étude du mouvement relatif des deux points.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication.

Notations. Le référentiel galiléen R est repéré par (O, x, y, z) .

Dans tout ce chapitre les deux particules seront M_1 et M_2 , de masses respectives m_1 et m_2 , de vitesse $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, d'accélération $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$. . . dans R . On notera $m = m_1 + m_2$ la masse totale, $\vec{v}_G$ la vitesse du centre de masse G et $\vec{a}_G$ son accélération dans R .

La force exercée par M_i sur M_j est notée $\vec{f}_{i \rightarrow j}$.

Dans le référentiel barycentrique R^* , toutes les grandeurs auront une étoile en exposant.

1 Propriétés du référentiel barycentrique

- ☐ V ☐ F a. Le référentiel barycentrique peut avoir un mouvement de translation ou de rotation par rapport à R .

- ☐ V ☐ F **b.** Le référentiel barycentrique est galiléen.
- ☐ V ☐ F **c.** Dans le référentiel barycentrique, la quantité de mouvement totale est nulle.
- ☐ V ☐ F **d.** Dans le référentiel barycentrique, le moment cinétique total est indépendant du point par rapport auquel on le calcule.
- ☐ V ☐ F **e.** Dans le référentiel barycentrique, l'énergie cinétique totale est nulle.

2 Les forces intérieures :

- ☐ V ☐ F **a.** La résultante des forces intérieures est nulle.
- ☐ V ☐ F **b.** Le moment des forces intérieures n'est pas nul.

Consignes

QCM

Il peut y avoir, pour certaines questions, deux propositions exactes.

3 Quelle(s) relation(s) vérifie(nt) le centre de masse G ?

- ☐ a. $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ ☐ b. $(m_1 + m_2)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}$
- ☐ c. $\overrightarrow{GM_1} + \overrightarrow{GM_2} = \vec{0}$ ☐ d. $m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = \vec{0}$

4 Exprimer la quantité de mouvement totale $\vec{P}$ et l'énergie cinétique totale E_c dans R .

- ☐ a. $\vec{P} = m(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$ ☐ b. $\vec{P} = m\vec{v}_G$
- ☐ c. $E_c = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$ ☐ d. $E_c = \frac{1}{2}mv_G^2$

5 Déterminer l'expression du travail des forces intérieures δW_{int} :

- ☐ a. $\delta W_{int} = \overrightarrow{f_{2 \rightarrow 1}} \cdot d\overrightarrow{M_1M_2}$ ☐ b. $\delta W_{int} = \overrightarrow{f_{1 \rightarrow 2}} \cdot d\overrightarrow{M_2M_1}$
- ☐ c. $\delta W_{int} = \overrightarrow{f_{1 \rightarrow 2}} \cdot d\overrightarrow{M_1M_2}$ ☐ d. $\delta W_{int} = \overrightarrow{f_{2 \rightarrow 1}} \cdot d\overrightarrow{M_2M_1}$

- 6** On note δW_{ext} , le travail élémentaire des forces extérieures. Le théorème de l'énergie cinétique dans R s'écrit :

☐ a. $dE_c = \delta W_{int} + \delta W_{ext}$ ☐ b. $d\left(\frac{1}{2}mv_G^2\right) = \delta W_{int} + \delta W_{ext}$
☐ c. $dE_c = \delta W_{ext}$ ☐ d. $d\left(\sum_1^2 \frac{1}{2}m_i v_i^2\right) = \delta W_{int} + \delta W_{ext}$

- 7** Les forces $\overrightarrow{f_{1 \rightarrow 2}} = -k\overrightarrow{M_1 M_2}$ et $\overrightarrow{f_{2 \rightarrow 1}} = -k\overrightarrow{M_2 M_1}$ dérivent d'une énergie potentielle. On note $E_{p,int}$ l'énergie potentielle d'interaction entre M_1 et M_2 et $E_{p,ext}$ l'énergie potentielle des forces extérieures. Définir $E_{p,int}$ et écrire l'expression de l'énergie mécanique du système E_m .

☐ a. $E_{p,int} = \frac{1}{2}k(M_1 M_2)^2$ ☐ b. $E_{p,int} = \frac{1}{2}k(OM_1)^2 + \frac{1}{2}k(OM_2)^2$
☐ c. $E_M = E_c + 2E_{p,int} + E_{p,ext}$ ☐ d. $E_M = E_c + E_{p,int} + E_{p,ext}$

- 8** On note $\vec{v}$ la vitesse relative $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Exprimer l'énergie cinétique totale dans le référentiel barycentrique en fonction de $\vec{v}$:

☐ a. $E_c^* = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$ ☐ b. $E_c^* = \frac{1}{2} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} v^2$
☐ c. $E_c^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2$ ☐ d. $E_c^* = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2$

- 9** On définit la particule fictive M dans le référentiel R^* par $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1 M_2}$. Quelle est la masse équivalente μ de cette particule ?

☐ a. $\mu = m_1 + m_2$ ☐ b. $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$
☐ c. $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ ☐ d. $\mu = \frac{m_1 + m_2}{2}$

- 10** La force $\vec{f}$ s'exerçant sur la particule fictive est donnée par l'expression suivante :

☐ a. $\vec{f} = \overrightarrow{f_{1 \rightarrow 2}} + \overrightarrow{f_{2 \rightarrow 1}} = \vec{0}$ ☐ b. $\vec{f} = \overrightarrow{f_{1 \rightarrow 2}}$
☐ c. $\vec{f} = \overrightarrow{f_{1 \rightarrow 2}} - \overrightarrow{f_{2 \rightarrow 1}}$ ☐ d. $\vec{f} = \overrightarrow{f_{2 \rightarrow 1}}$

- 11** Le mouvement de M a les propriétés générales suivantes :

☐ a. Il est à force centrale. ☐ b. Il est rectiligne.
☐ c. Il est plan. ☐ d. Il est elliptique.

- 12** Dans le cas d'une force du type $\overrightarrow{f_{i \rightarrow j}} = \frac{k}{(M_i M_j)^3} \overrightarrow{M_i M_j}$, montrer que l'on peut définir une énergie potentielle efficace E_{eff} pour l'étude du mouvement radial de M , où intervient la constante des aires $C = r^2 \dot{\theta}$, avec $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{GM}$ et $\dot{\theta}$ la vitesse angulaire de M dans la plan du mouvement. Établir son expression.

☐ a. $E_{eff} = -\frac{k}{r} + \frac{\mu C^2}{2r^2}$ ☐ b. $E_{eff} = \frac{k}{r} + \frac{\mu C^2}{2r^2}$

☐ c. $E_{eff} = \frac{k}{r} + \frac{C^2}{2r^2}$ ☐ d. $E_{eff} = \frac{\mu C^2}{2r^2}$

Voir corrigés page [210](#)

10 Cinématique du point

VRAI/FAUX

1 Soit un point matériel M en mouvement dans un référentiel R .

☐ V ☒ F a. Un point matériel est un système de petites dimensions.

La notion de point matériel n'a rien à voir avec la taille ; il s'agit d'un système dont la position dans l'espace est parfaitement définie par 3 coordonnées seulement, par exemple un solide en translation dans R .

☒ V ☐ F b. La trajectoire de M dépend du référentiel d'étude.

De manière générale, il faut avant de démarrer l'étude d'un mouvement, préciser dans quel référentiel on l'effectue : la notion de mouvement et les caractéristiques de ce mouvement changent d'un référentiel à un autre.

☐ V ☒ F c. L'unité de vitesse est le kilomètre-heure.

La vitesse est définie par $\vec{v} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_R$ c'est donc du point de vue des dimensions une longueur sur une durée : le kilomètre **par** heure est une unité usuelle de vitesse, pas le « kilomètre-heure » (faute de langage couramment entendue...)

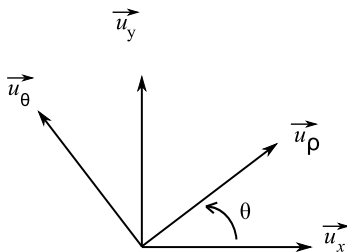
☐ V ☒ F d. Si le mouvement est uniforme, l'accélération de M est nulle.

La vitesse d'un mouvement uniforme a une norme constante, mais sa direction peut varier, donc sa dérivée est non nulle (sauf cas particulier).

2 On considère dans le plan xOy les vecteurs de base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ ($\rho = OM$ et θ est l'angle polaire entre Ox et $\vec{OM}$).

☐ V ☒ F a. $\vec{u}_x = \cos \theta \cdot \vec{u}_\rho + \sin \theta \cdot \vec{u}_\theta$

Faire un schéma avec les vecteurs $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ dans le cas simple où $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$; θ est l'angle entre $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_\rho$, $(\widehat{\vec{u}_x, \vec{u}_y}) = (\widehat{\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta}) = \frac{\pi}{2}$:



d'où $\vec{u}_x = \cos \theta \cdot \vec{u}_\rho - \sin \theta \cdot \vec{u}_\theta$; en cas de doute, vérifier pour les cas particuliers $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.

☐ V ☒ F b. $\vec{u}_y = \sin \theta \cdot \vec{u}_\rho - \cos \theta \cdot \vec{u}_\phi$

Erreur de signe : $\vec{u}_y = \sin \theta \cdot \vec{u}_\rho + \cos \theta \cdot \vec{u}_\phi$

☒ V ☐ F c. $\vec{u}_\rho = \cos \theta \cdot \vec{u}_x + \sin \theta \cdot \vec{u}_y$

☐ V ☒ F d. $\vec{u}_\theta = \sin \theta \cdot \vec{u}_x - \cos \theta \cdot \vec{u}_y$

Erreur de signe : $\vec{u}_\theta = -\sin \theta \cdot \vec{u}_x + \cos \theta \cdot \vec{u}_y$

3 Soit un point matériel M en mouvement rectiligne dans le plan xOy lié à R .

☒ V ☐ F a. Les vecteurs vitesse et accélération de M ont une direction constante.

Dans le cas d'un mouvement rectiligne ces vecteurs sont tous les deux colinéaires à la trajectoire donc de direction constante.

☐ V ☒ F b. Les vecteurs vitesse et accélération de M ont une norme constante.

Non, il s'agirait de mouvements particuliers (rectiligne uniforme pour $\|\vec{v}\|$ constante ou rectiligne uniformément accéléré pour $\|\vec{a}\|$ constante et non nulle).

☒ V ☐ F c. Si le mouvement est uniforme, l'accélération de M est nulle.

C'est vrai ici, puisque le mouvement est rectiligne **et** uniforme.

☐ V ☒ F d. Au moment où M fait demi-tour, son accélération s'annule.

Quand la vitesse varie, l'accélération est non nulle : c'est précisément le cas lors du demi-tour.



Ne pas croire que si la vitesse s'annule à un instant donné, l'accélération aussi, sauf s'il y a arrêt définitif du mobile.

4 Soit un point matériel M en mouvement circulaire de centre O dans le plan xOy lié à R .

☐ V ☒ F a. Si le mouvement est uniforme, le vecteur vitesse est constant.

Lors d'un mouvement circulaire, la vitesse change de direction, sa dérivée n'est donc pas nulle.

☐ V ☒ F b. Si le mouvement est uniforme, l'accélération de M est centrifuge.

Lors d'un mouvement circulaire uniforme, $a_\rho = -\rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 < 0$ et $a_\theta = 0$: le vecteur accélération est donc dirigé de M vers O , l'accélération est centripète et non centrifuge.

☒ V ☐ F c. Le vecteur rotation $\vec{\omega}$ est perpendiculaire au plan de la trajectoire.

Par définition, $\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_z$ est parallèle à l'axe de symétrie de la trajectoire, donc perpendiculaire au cercle.

☒ V ☐ F d. Le vecteur vitesse est donné par $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$

$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_z \wedge R_c \vec{u}_\rho = R_c \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$ qui est bien l'expression du vecteur vitesse d'un mouvement circulaire de rayon R_c en coordonnées cylindriques.

QCM

5 L'accélération de M est égale à $\vec{a} = a_1 \vec{u}_y$ où a_1 est une constante. À $t = 0$, la vitesse $\vec{v}_0$ est parallèle à $\vec{u}_x$.

☐ a. Le mouvement est rectiligne. ☐ b. Le mouvement est circulaire.

☒ c. Le mouvement est parabolique. ☐ d. $\|\vec{v}\| = |v_0 + a_1 t|$

En intégrant par rapport au temps $\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = a_1 t \end{cases}$ puis $\begin{cases} x = v_0 t \\ y = a_1 \frac{t^2}{2} = a_1 \frac{x^2}{2v_0^2} \end{cases}$ en choisissant la position initiale comme origine du repère, on obtient l'équation d'une parabole.



Il y a deux composantes perpendiculaires pour la vitesse, sa norme n'est pas $|v_0 + a_1 \cdot t|$ mais $\sqrt{v_0^2 + (a_1 t)^2}$.

6 Le point M est en mouvement dans le plan xOy ; les équations horaires du mouvement sont $x(t) = A \cdot \cos(\omega t) + x_1$ et $y(t) = y_0$ avec x_1 et y_0 des constantes.

☐ a. La trajectoire est sinusoïdale.

☒ b. L'équation différentielle du mouvement est $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \omega^2 x_1$.

☒ c. La trajectoire est rectiligne.

☐ d. L'équation différentielle du mouvement est $\frac{d^2 x}{dt^2} - \omega^2 x = -\omega^2 x_1$.

Le mouvement se fait parallèlement à l'axe Ox , il est rectiligne (c'est l'équation horaire qui est de forme sinusoïdale). Si on dérive deux fois $x(t)$ on obtient $\frac{d^2 x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t)$ d'où l'équation différentielle, qui correspond donc à un mouvement oscillatoire autour de la position repérée par $x = x_1$; il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique, comme on le verra plus loin en Dynamique.

7 Le point M est en mouvement le long de l'axe Ox ; sa vitesse initiale est $v_{0x} = v_0 > 0$. Il se déplace avec une accélération constante jusqu'à l'instant t_1 où sa vitesse a doublé, puis freine de façon uniforme jusqu'à s'arrêter à l'instant final $t_2 = 2t_1$. Quelle est la distance totale L parcourue ?

☐ a. $L = 2v_0t_1$ ☐ b. $L = 2,25 v_0 t_1$

☒ c. $L = 2,5 v_0 t_1$ ☐ d. $L = 2,75 v_0 t_1$

Pendant la 1^{re} phase du mouvement ($0 < t < t_1$) l'accélération est constante et $a_x = \frac{2v_0 - v_0}{t_1} = \frac{v_0}{t_1}$.

De même, pendant la 2^{de} phase ($t_1 < t < 2t_1$), $a'_x = \frac{0 - 2v_0}{t_1} = \frac{-2v_0}{t_1}$.

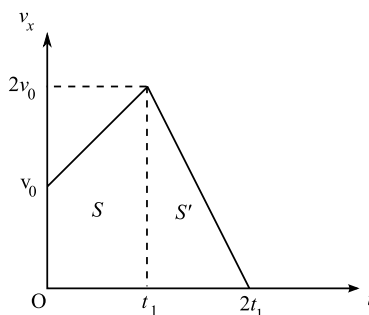
Donc, pour $0 < t < t_1$, $v_x = v_0 + \frac{v_0 t}{t_1}$ et en prenant la position initiale comme origine de l'axe, $x = v_0 t + \frac{v_0 t^2}{2t_1}$; à t_1 , $x_1 = v_0 t_1 + \frac{v_0 t_1^2}{2t_1} = \frac{3}{2} v_0 t_1$.

Pour $t_1 < t < 2t_1$, $v_x = -\frac{2v_0 t}{t_1} + v'$ avec v' une constante telle qu'à $t = t_1$, $v_x = 2v_0$, soit $v' = 4v_0$ donc $v_x = -\frac{2v_0 t}{t_1} + 4v_0$; par intégration, $x = -\frac{v_0 t^2}{t_1} + 4v_0 t + x'$, x' étant une constante telle qu'à $t = t_1$, $x = x_1$ d'où l'équation : $\frac{3}{2} v_0 t_1 = -\frac{v_0 t_1^2}{t_1} + 4v_0 t_1 + x'$ donc $x' = -\frac{3}{2} v_0 t_1$.

On en déduit qu'à $t = 2t_1$, $x_2 = -\frac{4v_0 t_1^2}{t_1} + 8v_0 t_1 - \frac{3}{2} v_0 t_1 = \frac{5}{2} v_0 t_1$ qui est la distance totale parcourue depuis le démarrage.

Il faut faire attention aux conditions initiales de chaque phase du mouvement pour déterminer les constantes d'intégration.

Pour arriver plus simplement à la réponse, on peut s'aider du graphe $v_x = f(t)$; l'accélération étant constante par morceaux, la courbe est formée de segments de droite (voir figure ci-dessous).



La distance parcourue correspond à la surface sous la courbe (interprétation géométrique d'une intégrale), avec une surface totale : $S + S' = \frac{3}{2} v_0 t_1 + \frac{1}{2} \cdot 2v_0 \cdot t_1 = \frac{5}{2} v_0 t_1 = x_2$.

- 8** Le point matériel A se déplace à vitesse constante de norme V vers la gauche sur l'axe Ox , le point matériel B se déplace à vitesse constante de même norme sur l'axe Oy ; initialement, B est à l'origine du repère, A est situé à droite de O , à une distance L . Déterminer les positions de A et B à un instant quelconque et en déduire la distance D minimale entre les deux points.

☐ a. $D = \frac{L}{4}$ ☐ b. $D = \frac{L}{3}$ ☐ c. $D = \frac{L}{2}$ ☒ d. $D = \frac{L}{\sqrt{2}}$

D'après la description du mouvement, $v_{Ax} = -V$ et $v_{By} = \pm V$. Par intégration, compte tenu des conditions initiales, $x_A = L - Vt$ et $y_B = \pm Vt$ ($y_A = x_B = 0$).

La distance entre les deux points est égale à $D(t) = \sqrt{(L - Vt)^2 + (Vt)^2}$; la dérivée par rapport au temps est égale à $D'(t) = \frac{-2V(L - Vt) + 2V^2t}{2\sqrt{(L - Vt)^2 + (Vt)^2}} = \frac{V(2Vt - L)}{\sqrt{(L - Vt)^2 + (Vt)^2}}$

Elle s'annule pour $t_1 = \frac{L}{2V}$ (en étudiant le signe de la dérivée on vérifie qu'il s'agit bien d'un minimum); $D(t_1) = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{L}{\sqrt{2}}$.

- 9** Le point M parcourt le cercle de rayon $b = 10 \text{ cm}$ à la vitesse $v_0 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- ☒ a. La période de rotation est $T = 100\pi \text{ ms}$.
☐ b. L'accélération vaut $6,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
☐ c. La période de rotation est $T = 10\pi \text{ s}$.
☒ d. L'accélération vaut $40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

La vitesse étant constante, $v_0 = \frac{2\pi b}{T}$ soit $T = \frac{2\pi b}{v_0}$.

L'accélération d'un mouvement circulaire uniforme est centripète : $a_p = -b \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{v_0^2}{b}$; pour l'application numérique prendre b en mètres.

- 10** Le point M parcourt le cercle de rayon b à la vitesse $v = \alpha t$ où α est une constante positive. Soient v_ρ et v_θ les composantes de la vitesse.

- ☐ a. $v_\rho = \alpha t$ ☒ b. $v_\rho = 0$ ☒ c. $v_\theta = \alpha t$ ☐ d. $v_\theta = 0$

Les composantes de la vitesse en coordonnées cylindriques sont : $v_\rho = \frac{d\rho}{dt} = 0$ sur un cercle où ρ est constant, et $v_\theta = \rho \frac{d\theta}{dt}$ qui est donc la seule composante non nulle.

- 11** Le point M parcourt le cercle de rayon b à la vitesse $v_0 = \alpha t$ où α est une constante. Soient a_ρ et a_θ les composantes de l'accélération.

- ☐ a. $a_\rho = \alpha$ ☒ b. $a_\rho = -\frac{(\alpha t)^2}{b}$ ☒ c. $a_\theta = \alpha$ ☐ d. $a_\theta = 0$

Les composantes de l'accélération en coordonnées cylindriques sont :

$$a_\rho = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -b \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad \text{et} \quad a_\theta = \rho \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \left(\frac{d\rho}{dt} \right) \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = b \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

D'après la question précédente $v_\theta = \alpha t = \rho \frac{d\theta}{dt}$ donc $\alpha t = b \frac{d\theta}{dt}$ soit $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\alpha t}{b}$ et $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\alpha}{b}$.

On remplace alors les dérivées de θ dans les composantes de l'accélération.

- 12** Le point M se déplace sur une courbe plane d'équation en coordonnées polaires dans le plan xOy : $\rho = \rho_0 \cdot \exp(-\theta)$ avec $\theta = \omega t$. La norme de la vitesse vaut :

☐ a. $v = 0$

☐ b. $v = \omega \cdot \rho$

☒ c. $v = \sqrt{2} \cdot \omega \cdot \rho$

☐ d. $v = 2 \cdot \omega \cdot \rho$

$$v_\rho = \frac{d\rho}{dt} = -\omega\rho_0 \cdot \exp(-\omega t) = -\omega\rho \quad \text{et} \quad v_\theta = \rho \frac{d\theta}{dt} = \omega\rho ; \quad v = \sqrt{(\omega\rho)^2 + (\omega\rho)^2}.$$

- 13** Le point M se déplace sur une courbe plane d'équation en coordonnées polaires dans le plan xOy : $\rho = \rho_0 \cdot \exp(-\theta)$ avec $\theta = \omega t$. Les composantes de l'accélération sont :

☐ a. $a_\rho = \omega^2\rho$

☒ b. $a_\rho = 0$

☒ c. $a_\theta = -2\omega^2\rho$

☐ d. $a_\theta = 0$

$$a_\rho = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \omega^2\rho - \rho\omega^2$$

$$a_\theta = \rho \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \left(\frac{d\rho}{dt} \right) \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = 0 - 2\omega\rho \cdot \omega$$

- 14** Le point M se déplace d'un mouvement uniforme (vitesse de norme v_0) dans le plan xOy , son vecteur vitesse faisant l'angle constant α avec $\overrightarrow{OM}$; à $t = 0$, $OM = \rho = b$ et $\theta = 0$.

☐ a. $\rho = b + v_0 t \sin \alpha$

☒ b. $\rho = b + v_0 t \cos \alpha$

☒ c. $\theta = \tan \alpha \cdot \ln \left(\frac{\rho}{b} \right)$

☐ d. $\theta = \frac{v_0 t \sin \alpha}{b}$

$v_\rho = \frac{d\rho}{dt} = v_0 \cos \alpha$, α étant l'angle entre $\vec{u}_\rho$ et $\vec{v}_0$. En intégrant avec les conditions initiales, $\rho = b + v_0 t \cos \alpha$.

Si on remplace ρ par $b + v_0 t \cos \alpha$ dans $v_\theta = v_0 \sin \alpha = \rho \frac{d\theta}{dt} = (b + v_0 t \cos \alpha) \frac{d\theta}{dt}$ on obtient

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0 \sin \alpha}{(b + v_0 t \cos \alpha)} ; \text{ on intègre :}$$

$$\theta = \int_0^t \frac{v_0 \sin \alpha}{(b + v_0 t' \cos \alpha)} dt' = \tan \alpha [\ln(b + v_0 t' \cos \alpha)]_0^t = \tan \alpha (\ln(b + v_0 t \cos \alpha) - \ln(b))$$

- 15** Le point M se déplace sur une parabole d'équation $y = \alpha x^2$ dans le plan xOy (α constante positive). La composante de la vitesse $v_x = v_0 > 0$ est constante ; à $t = 0$, M est à l'origine du repère. Calculer les normes de la vitesse et de l'accélération.

☐ a. $v = v_0 + 2\alpha v_0^2 t$

☒ b. $a = 2\alpha v_0^2$

☒ c. $v = v_0 \sqrt{1 + (2\alpha v_0 t)^2}$

☐ d. $a = \frac{4\alpha^2 v_0^2 t}{\sqrt{1 + (2\alpha v_0 t)^2}}$

Compte tenu des conditions initiales, $x(t) = v_0 t$ et donc $y(t) = \alpha (v_0 t)^2$.

Par dérivation, $v_y = 2\alpha v_0^2 t$ et donc $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_0 \sqrt{1 + (2\alpha v_0 t)^2}$.

En dérivant à nouveau : $a_y = 2\alpha v_0^2$ (seule composante de l'accélération puisque v_x est constante).



Ne pas dériver le module de $\vec{v}$ pour déterminer celui de $\vec{a}$!

- 16** Le mouvement de M est étudié en coordonnées polaires dans le plan xOy ; la vitesse angulaire est constante et égale à ω et l'accélération est orthoradiale ; à $t = 0$, M est à l'origine du repère et $v = v_0$. On peut en déduire que :

☒ a. $\rho = \frac{v_0}{2\omega} (e^{\omega t} - e^{-\omega t})$

☐ b. $\rho = \frac{v_0}{\omega} (e^{\omega t} - e^{-\omega t})$

☐ c. $a_\theta = \omega v_0 (e^{\omega t} - e^{-\omega t})$

☒ d. $a_\theta = \omega v_0 (e^{\omega t} + e^{-\omega t})$

D'après les données, $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ est une constante et $a_\rho = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 0$ puisque l'accélération n'a pas de composante radiale.

En combinant les deux relations $\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\omega^2 = 0$; l'équation caractéristique de cette équation différentielle linéaire est $r^2 - \omega^2 = 0$ d'où $r = \pm\omega$ et donc $\rho(t) = \alpha e^{\omega t} + \beta e^{-\omega t}$ avec α et β deux constantes.

Compte tenu des conditions initiales ($\rho(0) = 0$ et $v_0 = \frac{d\rho}{dt}$), la solution $\rho = \frac{v_0}{2\omega} (e^{\omega t} - e^{-\omega t})$ convient et c'est la seule.

L'accélération orthoradiale est alors donnée par :

$$a_\theta = \rho \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \left(\frac{d\rho}{dt} \right) \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = 0 + 2 \left(\frac{d\rho}{dt} \right) \omega = \omega v_0 (e^{\omega t} + e^{-\omega t}).$$

11 Lois de la dynamique en référentiel galiléen

- 1** Un point matériel M de masse m décrit à vitesse constante de norme v une trajectoire circulaire de rayon b ; déterminer la résultante des forces auxquelles il est soumis.

☒ a. $\vec{\Sigma F}$ est centripète. ☐ b. $\vec{\Sigma F}$ est centrifuge.

☐ c. $\|\vec{\Sigma F}\| = m \frac{dv}{dt}$ ☒ d. $\|\vec{\Sigma F}\| = \frac{mv^2}{b}$

D'après le principe fondamental de la dynamique en référentiel galiléen, $\vec{\Sigma F} = m\vec{a}$.

Lors d'un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est radiale et en coordonnées polaires $a_\rho = -b \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{v^2}{b}$ (voir le cours de Cinématique); $ma_\rho < 0$ donc la résultante des forces est centripète.

- 2** Un point matériel M de masse m se déplace sur une trajectoire elliptique de centre O dans le plan xOy ; les équations horaires de son mouvement sont en coordonnées cartésiennes : $x(t) = \alpha \cos \omega t$ et $y(t) = \beta \sin \omega t$ où α, β et ω sont des constantes.

Déterminer la résultante des forces $\vec{\Sigma F}$ subies par M .

☐ a. $\vec{\Sigma F} = m\omega^2 \vec{OM}$ ☒ b. $\vec{\Sigma F} = -m\omega^2 \vec{OM}$

☐ c. $\vec{\Sigma F} = m\omega^2 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \vec{u}_\rho$ ☐ d. $\vec{\Sigma F} = \vec{0}$

$$\vec{\Sigma F} = m\vec{a} \text{ avec en coordonnées cartésiennes : } \begin{cases} a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x \\ a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -\beta\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 y \end{cases}$$

donc les composantes de $\vec{\Sigma F}$ sont $\Sigma F_x = -m\omega^2 x$ et $\Sigma F_y = -m\omega^2 y$.

- 3** Un point matériel M de masse m se déplace dans le plan xOy suivant les équations horaires en coordonnées polaires : $\rho(t) = b \cos \omega t$ et $\theta(t) = \omega t$ où b et ω sont des constantes. Déterminer les composantes de la résultante des forces subies par M .

☐ a. $F_\rho = -m\omega^2 \rho$ ☒ b. $F_\rho = -2m\omega^2 \rho$

☒ c. $F_\theta = -2mb\omega^2 \sin \omega t$ ☐ d. $F_\theta = 0$

De même, $\vec{\Sigma F} = m\vec{a}$ avec en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} a_\rho = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -b\omega^2 \cos \omega t - (b \cos \omega t)\omega^2 = -2b\omega^2 \cos \omega t \\ a_\theta = \rho \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} = -2(b\omega \sin \omega t)\omega \end{cases}$$

- 4 Une balle de masse m est lancée depuis le sol verticalement vers le haut avec une vitesse initiale V_0 ; on néglige la résistance de l'air. Déterminer la cote $z_{\max}$ du point le plus haut de la trajectoire et la durée totale T du mouvement.

☒ a. $z_{\max} = \frac{V_0^2}{2g}$ ☐ b. $z_{\max} = \frac{V_0^2}{g}$

☐ c. $T = \frac{V_0}{2g}$ ☒ d. $T = \frac{2V_0}{g}$

La seule force appliquée à la balle est le poids.

En coordonnées cartésiennes, l'axe Oz étant dirigé suivant la verticale ascendante, les projections du principe fondamental de la dynamique donnent :

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = -g \end{cases}$$

d'où par intégration, avec une vitesse initiale parallèle à Oz :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0 \\ \frac{dz}{dt} = -gt + V_0 \end{cases}$$

et en prenant l'origine du repère au niveau du sol :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -g \frac{t^2}{2} + V_0 t \end{cases}.$$

Le demi-tour a lieu pour $\frac{dz}{dt} = 0 = -gt + V_0$. Alors

$$t = \frac{V_0}{g} \quad \text{et} \quad z_{\max} = -g \frac{\left(\frac{V_0}{g}\right)^2}{2} + V_0 \frac{V_0}{g} = \frac{V_0^2}{2g}.$$

Le retour au sol a lieu pour $z = 0$ donc $0 = -g \frac{t^2}{2} + V_0 t$ soit $T = \frac{2V_0}{g}$.

- 5** Une balle de masse m est lancée horizontalement avec une vitesse initiale V_0 depuis un point situé à une hauteur H au-dessus du sol ; on néglige la résistance de l'air. Déterminer la distance horizontale D entre le point de départ et le point de chute.

☐ a. $D = V_0 \sqrt{\frac{H}{2g}}$ ☐ b. $D = V_0 \sqrt{\frac{H}{g}}$

☒ c. $D = V_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$ ☐ d. $D = 2V_0 \sqrt{\frac{H}{g}}$

De même qu'à la question précédente :

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = -g \end{cases}$$

mais la 1^{re} intégration donne, en tenant compte des conditions initiales :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = V_0 \\ \frac{dy}{dt} = 0 \\ \frac{dz}{dt} = -gt \end{cases}$$

En plaçant l'origine à la verticale de la position initiale,

$$\begin{cases} x = V_0 t \\ y = 0 \\ z = H - g \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

Pour $z = 0$ (point de chute), $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ et $x = D = V_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$.

- 6** Une bille de masse m est lâchée sans vitesse initiale ; on tient compte lors de la chute de la résistance de l'air, supposée de la forme $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ avec α une constante positive. Écrire l'équation du mouvement et en déduire la vitesse limite v_l . Déterminer la durée T au bout de laquelle la vitesse est égale à la moitié de v_l .

☐ a. $v_l = \frac{mg}{2\alpha}$ ☒ b. $v_l = \frac{mg}{\alpha}$

☐ c. $T = \frac{2m}{\alpha}$ ☒ d. $\frac{m \ln 2}{\alpha}$

L'équation du mouvement est $m\vec{a} = m\vec{g} - \alpha\vec{v}$. Quand la vitesse limite est atteinte, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ donc $\vec{v}_l = \frac{m\vec{g}}{\alpha}$. Cette vitesse est verticale et dirigée vers le bas ; elle est d'autant plus grande que la masse est grande et que les frottements sont faibles.

En coordonnées cartésiennes, l'axe Oz étant dirigé suivant la verticale **descendante**, les projections du principe fondamental de la dynamique donnent :

$$\begin{cases} (1) & m \frac{dv_x}{dt} = -\alpha v_x \\ (2) & m \frac{dv_y}{dt} = -\alpha v_y \\ (3) & m \frac{dv_z}{dt} = g - \alpha v_z \end{cases}$$

L'équation (1) est de la forme $\frac{dv_x}{dt} + \frac{1}{\tau}v_x = 0$ avec $\tau = \frac{m}{\alpha}$. Par intégration, $v_x(t)$ est de la forme $v_x(t) = v_{0x} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$ et avec une vitesse initiale nulle, $v_{0x} = 0$. Le raisonnement est le même pour l'équation (2), donc la vitesse est à tout instant colinéaire à Oz .

L'équation (3) est de la forme $\frac{dv_z}{dt} + \frac{1}{\tau}v_z = g$. Par intégration, $v_z(t)$ est de la forme $v_z(t) = k \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + \tau g$ et comme la vitesse initiale est nulle, $k = -\tau g = -v_l$.

Finalement, $v_z(t) = v_l \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right)$; la moitié de la vitesse limite sera atteinte quand $\frac{1}{2} = 1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$ soit pour $T = \tau \ln(2) = \frac{m}{\alpha} \ln(2)$.

7 Une bille de masse m est lancée verticalement vers le haut ; on tient compte lors du mouvement de la résistance de l'air, supposée de la forme $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ avec α une constante positive. Déterminer le temps T mis pour atteindre le sommet de la trajectoire, la vitesse initiale étant V_0 .

☐ a. $T = \frac{m}{\alpha} \ln\left(2 + \frac{\alpha V_0}{mg}\right)$ ☐ b. $T = 2 \frac{m}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{\alpha V_0}{mg}\right)$

☒ c. $T = \frac{m}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{\alpha V_0}{mg}\right)$ ☐ d. $T = \frac{m}{2\alpha} \ln\left(1 + \frac{\alpha V_0}{mg}\right)$

Comme à la question 5, la vitesse est à tout instant colinéaire à Oz , le mouvement se fait suivant la verticale ; la condition initiale sur v_z étant modifiée, on choisit d'orienter l'axe Oz vers le haut : alors l'équation (3) devient $m \frac{dv_z}{dt} = -g - \alpha v_z$ et a pour solution, avec les mêmes notations, $v_z(t) = k \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) - \tau g$.

À $t = 0$, $V_0 = k - \tau g$ d'où $v_z(t) = (V_0 + \tau g) \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) - \tau g$; le point le plus haut de la trajectoire est atteint à l'instant où la vitesse s'annule.

$$T = \tau \ln\left(1 + \frac{V_0}{\tau g}\right) = \frac{m}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{\alpha V_0}{mg}\right).$$

- 8** Un palet de masse m glisse sur un plan horizontal ; il existe une force de frottement telle que $\|\vec{R}_t\| = f \|\vec{R}_n\|$ avec $\vec{R}_n$ la réaction normale au plan et $\vec{R}_t$ la réaction tangentielle. Le coefficient de frottement f est une constante positive.

À l'instant initial, $\|\vec{v}\|$ est égale à v_0 . Déterminer la distance parcourue par le palet avant qu'il ne s'arrête.

☐ a. $L = \frac{V_0^2}{4fg}$ ☐ b. $L = \frac{V_0^2}{3fg}$

☒ c. $L = \frac{V_0^2}{2fg}$ ☐ d. $L = \frac{V_0^2}{fg}$

Les forces subies par le palet sont le poids et la réaction du support. D'après le principe fondamental de la dynamique, $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} = m\vec{g} + \vec{R}_n + \vec{R}_t$.

En projection sur la verticale ascendante, $0 = -mg + \|\vec{R}_n\|$ d'où on tire $\|\vec{R}_n\| = mg$ puis $\|\vec{R}_t\| = fmg$.

On choisit l'axe Ox colinéaire à la vitesse initiale ; suivant Oy perpendiculaire à Ox il n'y a pas de mouvement compte tenu des conditions initiales et du bilan des forces.

En projection sur Ox , $m \frac{d^2x}{dt^2} = -\|\vec{R}_t\| = -fmg$; on intègre deux fois par rapport au temps en prenant la position initiale comme origine du repère :

$$\frac{dx}{dt} = V_0 - fgt$$

puis $x(t) = V_0t - \frac{fgt^2}{2}$; la vitesse s'annule pour $\tau = \frac{V_0}{fg}$ et la distance parcourue est

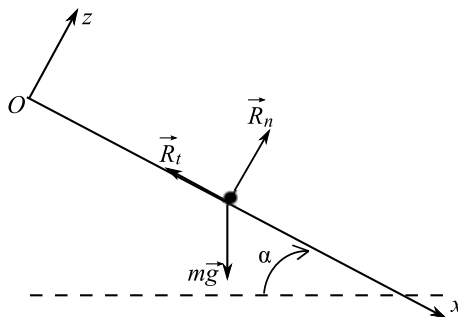
$$L = V_0 \frac{V_0}{fg} - \frac{fg \left(\frac{V_0}{fg} \right)^2}{2} = \frac{V_0^2}{2fg}.$$

- 9** Un palet M de masse m est posé sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale ; il existe une force de frottement telle que $\|\vec{R}_t\| = f \|\vec{R}_n\|$ avec $\vec{R}_n$ la réaction normale au plan et $\vec{R}_t$ la réaction tangentielle ; à quelle condition M se met-il à glisser ?

☒ a. $\sin \alpha > f \cos \alpha$ ☐ b. $\sin \alpha < f \cos \alpha$

☐ c. $\cos \alpha > f \sin \alpha$ ☐ d. $\cos \alpha < f \sin \alpha$

Les forces subies par le palet sont le poids et la réaction du support. D'après le principe fondamental de la dynamique, $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} = m\vec{g} + \vec{R}_n + \vec{R}_t$.



En projection sur la direction Oz perpendiculaire au support, $0 = -mg \cos \alpha + \|\vec{R}_n\|$ d'où on tire $\|\vec{R}_n\| = mg \cos \alpha$ puis $\|\vec{R}_t\| = fmg \cos \alpha$.

On choisit l'axe Ox colinéaire à la direction de plus grande pente ; en projection sur Ox , $m \frac{d^2x}{dt^2} = mg_x - \|\vec{R}_t\| = mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha)$; le palet se met à glisser si $\frac{d^2x}{dt^2} > 0$ donc si $\sin \alpha > f \cos \alpha$.

- 10** Un palet de masse m glisse sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale ; il existe une force de frottement telle que $\|\vec{R}_t\| = f \|\vec{R}_n\|$ avec $\vec{R}_n$ la réaction normale au plan et $\vec{R}_t$ la réaction tangentielle.

À l'instant initial, $\|\vec{v}\| = v_0$ et le vecteur vitesse est orienté suivant la ligne de plus grande pente, vers le bas.

Déterminer la réaction $\|\vec{R}\|$ exercée par le support et l'expression de la vitesse en fonction du temps.

- ☐ a. $\|\vec{R}\| = mg \cos \alpha (1 + f)$ ☒ b. $\|\vec{R}\| = mg \cos \alpha \sqrt{1 + f^2}$
☐ c. $v_x(t) = V_0 + gt(\cos \alpha - f \sin \alpha)$ ☒ d. $v_x(t) = V_0 + gt(\sin \alpha - f \cos \alpha)$

Comme dans la question précédente, $\|\vec{R}_n\| = mg \cos \alpha$ puis $\|\vec{R}_t\| = fmg \cos \alpha$.

Alors $\|\vec{R}\| = \sqrt{R_n^2 + R_t^2} = mg \cos \alpha \sqrt{1 + f^2}$

On choisit l'axe Ox colinéaire à la vitesse initiale ; suivant Oy perpendiculaire à Ox il n'y a pas de mouvement compte tenu des conditions initiales et du bilan des forces.

En projection sur Ox , $m \frac{d^2x}{dt^2} = mg_x - \|\vec{R}_t\| = mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha)$; on intègre par rapport au temps : $v_x(t) = V_0 + gt(\sin \alpha - f \cos \alpha)$.

- 11** Un point matériel M de masse m est accroché à un fil inextensible de masse négligeable et de longueur L . L'autre extrémité du fil est accrochée à un point O fixe. Le point M se déplace sur le plan xOy horizontal ; à $t = 0$ sa vitesse $\vec{v}_0$ est horizontale et perpendiculaire au fil tendu. On néglige les frottements. Déterminer la nature du mouvement et la tension du fil sachant que le fil reste tendu.

☒ a. mouvement circulaire uniforme ☐ b. mouvement oscillatoire

☐ c. $\|\vec{T}\| = m \frac{v_0^2}{2L}$

☒ d. $\|\vec{T}\| = m \frac{v_0^2}{L}$

Le fil étant inextensible, le mouvement est circulaire de centre O et de rayon L . Les forces subies par M sont le poids, la réaction du support et la tension du fil.

Le poids (vertical) et la réaction du support (les frottements sont négligés) sont perpendiculaires à xOy .

Dans le plan xOy on utilise les coordonnées polaires ; la seule force dans ce plan est la tension $\vec{T}$. En projection sur $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$:

$$\begin{cases} ma_\rho = -mL \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = T_\rho = -\|\vec{T}\| \\ ma_\theta = mL \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

puisque $\rho = L$ est une constante.

D'après la 2^e équation la vitesse $L \frac{d\theta}{dt}$ est constante : le mouvement est circulaire uniforme.

On a donc $L \frac{d\theta}{dt} = v_0$ et par conséquent $\|\vec{T}\| = mL \left(\frac{v_0}{L} \right)^2 = m \frac{v_0^2}{L}$.

- 12** Un point matériel M de masse m est suspendu à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_v dont l'autre extrémité est le point O fixe. L'axe Oz vertical est orienté vers le bas.

On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$, le mouvement étant supposé vertical ?

☒ a. $\frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2 z = g + \omega_0^2 l_v$ ☐ b. $\frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2 z = -g + \omega_0^2 l_v$

☐ c. $\frac{d^2z}{dt^2} - \omega_0^2 z = g - \omega_0^2 l_v$ ☒ d. $\frac{d^2z}{dt^2} - \omega_0^2 z = -g - \omega_0^2 l_v$

Les forces subies par M sont le poids et la tension du ressort ; le principe fondamental de la dynamique s'écrit $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$ avec $\vec{T} = -k(z - l_v)\vec{u}_z$.

En projection sur l'axe Oz , $m \frac{d^2z}{dt^2} = mg - k(z - l_v)$, soit $\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k}{m}l_v$.

- 13** Un point matériel M de masse m est accroché à un ressort de raideur k dont l'autre extrémité est le point O fixe. M glisse sans frottement sur l'axe horizontal Ox . À l'instant initial le ressort a sa longueur à vide l_v et la vitesse de M est $\vec{v}_0$ colinéaire à Ox ; quel est l'allongement maximal du ressort ?

☐ a. $\sqrt{2}l_v$ ☐ b. $\frac{l_v}{\sqrt{2}}$ ☒ c. $v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}$ ☐ d. $\frac{mg}{k}$

Les forces subies par M sont le poids, la tension du ressort et la réaction exercée par le support ; le principe fondamental de la dynamique s'écrit $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{T}$ avec $\vec{T} = -k(x - l_v)\vec{u}_x$.

La seule force horizontale est la tension du ressort. En projection sur l'axe Ox , $m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - l_v)$; posons $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$: l'équation se met sous la forme canonique $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 l_v$ de solution générale $x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + l_v$.

À $t = 0$, $x = l_v$ donc $A = 0$, et $\frac{dx}{dt} = v_0$ donc $B = \frac{v_0}{\omega_0}$.

L'allongement est donc $x(t) - l_v = B \sin \omega_0 t = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$, sa valeur maximale est

$$\frac{v_0}{\omega_0} = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

- 14** Un point matériel M de masse m est posé au fond d'une demi-sphère de rayon b ; on lui communique à $t = 0$ une vitesse v_0 horizontale ; quelle est à cet instant la réaction du support sachant que M glisse sans frottement sur la sphère ?

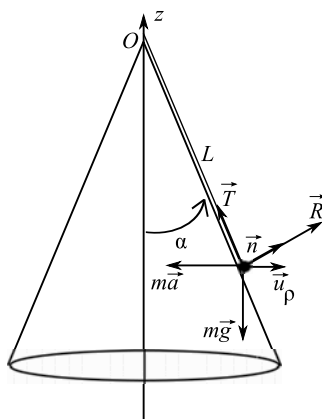
☐ a. $\|\vec{R}\| = mg$ ☒ b. $\|\vec{R}\| = m\frac{v_0^2}{b} + mg$
☐ c. $\|\vec{R}\| = 2mg$ ☐ d. $\|\vec{R}\| = m\frac{v_0^2}{2b} + mg$

Le point M est soumis à son poids et à la réaction de la sphère ; le mouvement est circulaire. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}$ avec $\vec{R}$ perpendiculaire à la sphère en l'absence de frottements.

À l'instant $t = 0$ les vecteurs $\vec{g}$ et $\vec{R}$ sont colinéaires et verticaux ; l'accélération est donc suivant la même direction : elle est radiale, et pour un mouvement circulaire elle est centripète, de norme $\|\vec{a}\| = b\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{v^2}{b} = \frac{v_0^2}{b}$; en projection sur la verticale ascendante,

$$m\frac{v_0^2}{b} = \|\vec{R}\| - mg \text{ donc } \|\vec{R}\| = m\frac{v_0^2}{b} + mg.$$

- 15** Un point matériel M de masse m est accroché à un fil inextensible de masse négligeable et de longueur L . L'autre extrémité du fil est accrochée à un point O fixe. M se déplace sans frottement sur un cône d'axe vertical Oz , de sommet O , de demi-angle au sommet α . En supposant que le fil reste tendu à tout instant et que la vitesse v est constante, déterminer la réaction du support.



- ☐ a. $R_n = m \left(\frac{v^2}{L \tan \alpha} + g \sin \alpha \right)$ ☒ b. $R_n = m \left(-\frac{v^2}{L \tan \alpha} + g \sin \alpha \right)$
- ☐ c. $R_n = m \left(\frac{v^2 \tan \alpha}{L} + g \sin \alpha \right)$ ☐ d. $R_n = m \left(-\frac{v^2 \tan \alpha}{L} + g \sin \alpha \right)$

Le point M se déplaçant sur un cône à distance fixe de son sommet, décrit un cercle centré sur l'axe Oz et de rayon $L \sin \alpha$. Sa vitesse étant constante, le mouvement est circulaire uniforme.

Les forces subies sont le poids, la tension du fil et la réaction exercée par le cône.

D'après le principe fondamental de la dynamique, $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{g} + \vec{R}_n + \vec{T}$. Pour déterminer la réaction, on projette la relation sur la normale $\vec{n}$ au cône : la tension est perpendiculaire à cette direction, donc sa composante est nulle.

On obtient : $-m \frac{v^2}{L \sin \alpha} \vec{u}_p \cdot \vec{n} = m\vec{g} \cdot \vec{n} + R_n$ avec $\vec{u}_p \cdot \vec{n} = \cos \alpha$ et $\vec{g} \cdot \vec{n} = -g \sin \alpha$. On en tire $R_n = -m \frac{v^2}{L \sin \alpha} \cos \alpha + mg \sin \alpha$.

12 Énergie

VRAI/FAUX

1 Notion de travail

☐ V ☒ F a. Le travail, comme la force, ne dépend pas du référentiel.

Le travail élémentaire a pour expression $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l}$ où $d\vec{l}$ est le déplacement élémentaire qui, lui, dépend du référentiel. Le produit scalaire dépend par conséquent du référentiel.

☒ V ☐ F b. Une force perpendiculaire à la trajectoire ne travaille pas.

$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l}$ donc si la force est perpendiculaire au déplacement, le travail est nul.

☐ V ☒ F c. Le travail d'une force lors d'un déplacement d'un point A à un point B ne dépend que de A et de B, pas de la forme de la trajectoire.

Ce n'est vrai que pour les forces conservatives, dérivant d'une énergie potentielle ; alors le travail de A à B est $W_A^B = E_p(A) - E_p(B)$. Mais ce n'est pas vérifié dans le cas général.

☐ V ☒ F d. Quand une même trajectoire est parcourue dans un sens, puis dans l'autre, le travail des forces auxquelles le système est soumis change de signe.

C'est faux en général ; certaines forces, comme les frottements, sont toujours résistantes et ne changent donc pas de signe quand le système fait demi-tour.

☒ V ☐ F e. $1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

En utilisant les équations aux dimensions : $[W] = [F][L] = [M] \left[\frac{L}{T^2} \right] [L] = \frac{[M][L]^2}{[T]^2}$ où M désigne une masse, L une longueur et T un temps.

On a bien dans le système MKSA : $1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$.

2 Notion d'énergie

☒ V ☐ F a. L'énergie cinétique augmente quand la résultante des forces est motrice.

D'après le théorème de l'énergie cinétique, $\Delta E_c = W_{\vec{F}}$ et quand la résultante des forces est motrice, $W_{\vec{F}} > 0$ donc l'énergie cinétique augmente.

☒ V ☐ F b. Toute force constante et uniforme dérive d'une énergie potentielle.

Si l'énergie potentielle existe, la relation entre le travail élémentaire et la différentielle de l'énergie potentielle est $\delta W = -dE_p$; si on choisit l'axe Ox parallèle à la force $\vec{F}$ ce qui est possible si $\vec{F}$ est uniforme et constante, $dE_p = -F_x \cdot dx$ avec F_x constante. Alors par intégration, $E_p = -F_x x + c$, c étant une constante. On en conclut qu'il existe bien une fonction énergie potentielle dont dérive la force $\vec{F}$.

☐ V ☒ F c. L'énergie potentielle de pesanteur diminue quand l'altitude croît.

Considérons le champ de pesanteur comme uniforme et constant : on est alors dans le cas de la question précédente ; si on oriente l'axe Oz vers le haut, étant donné que $\vec{g}$ est dirigé vers le bas, $E_p = -mg_z z + c = +m \|\vec{g}\| z + c$. Donc l'énergie potentielle de pesanteur augmente quand l'altitude croît.

☐ V ☒ F d. Si l'énergie potentielle augmente, l'énergie cinétique diminue.

Pour que ce soit vrai, il faudrait que toutes les forces soient conservatives, alors l'énergie mécanique $E_M = E_c + E_p$ serait constante, ce qui n'est pas précisé.

QCM

3 Soit un repère cartésien lié au référentiel terrestre ; l'axe Oz vertical est orienté vers le haut. Un point matériel M de masse m se déplace sur une parabole d'équation $z = \frac{x^2}{L}$ depuis l'origine du repère O jusqu'au point d'abscisse $x = L$. Calculer le travail du poids.

- ☐ a. $W = mgL$ ☐ b. $W = 2mgL$
☒ c. $W = -mgL$ ☐ d. $W = -2mgL$

Le travail élémentaire a pour expression $\delta W = m\vec{g} \cdot d\vec{l} = -mgdz$ puisque l'axe Oz est orienté vers le haut. En intégrant, $W = -mg(z(L) - z(0)) = -mgL$.

4 Un homme de masse $m = 70$ kg monte du rez-de-chaussée au 5^e étage en portant un pack de 6 bouteilles d'eau minérale de 1,5 L (hauteur d'un étage : 2,50 m ; $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$).

Déterminer la variation totale d'énergie potentielle et en déduire la puissance correspondante si l'homme monte d'une marche par seconde à raison de 18 marches par étage.

- ☐ a. 12,5 W ☐ b. 62,5 W ☐ c. 97 W ☒ d. 109,7 W

En utilisant le résultat précédent $W = -Mg(z(H) - z(0)) = -MgH$ en notant H la hauteur totale et M la masse totale avec $M = m + m_{\text{eau}}$. La puissance est le travail par unité de temps soit $P = \frac{|W|}{T} = \frac{(m + m_{\text{eau}})gH}{T}$ avec $T = 90$ s et $|W| = MgH = 9875$ J.

5 Un point matériel M de masse m est accroché à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_v . L'autre extrémité O du ressort est fixe et M se déplace le long de l'axe Ox . Déterminer le travail de la tension du ressort quand la longueur du ressort passe de l_v à $2l_v$.

- ☐ a. $W = kl_v^2$ ☐ b. $W = -kl_v^2$
☐ c. $W = \frac{k}{2}l_v^2$ ☒ d. $W = -\frac{k}{2}l_v^2$

Le travail élémentaire de la tension est $\delta W = \vec{T} \cdot d\vec{l} = -k(l - l_v)\vec{u}_x \cdot d\vec{x} = -k(x - l_v)dx$.

Par intégration $W = -\frac{k}{2} \left[(x - l_v)^2 \right]_{l_v}^{2l_v} = -\frac{k l_v^2}{2}$.

- 6** Un point matériel M de masse m se déplace le long de l'axe Ox avec une accélération $\vec{a}_0$ constante ; il démarre à $t = 0$ et il subit une force de frottement fluide $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$ sur une distance L . Déterminer le travail de cette force lors du déplacement de M .

☐ a. $W = -\alpha \sqrt{a_0 L^3}$ ☐ b. $W = -\alpha \sqrt{2a_0 L^3}$

☐ c. $W = -\frac{2\alpha}{3} \sqrt{a_0 L^3}$ ☒ d. $W = -\frac{\alpha}{3} \sqrt{8a_0 L^3}$

Le travail élémentaire de la force de frottement est $\delta W = -\alpha \vec{v} \cdot d\vec{l} = -\alpha v_x dx$.

Or $v_x = a_0 t$ et $x = a_0 \frac{t^2}{2}$. On en déduit que $v_x = a_0 \sqrt{\frac{2x}{a_0}} = \sqrt{2a_0 x}$

et donc $\delta W = -\alpha \sqrt{2a_0 x} dx$.

Par intégration $W = \int_0^L -\alpha \sqrt{2a_0 x} dx = -\alpha \sqrt{2a_0} \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^L = -\frac{\alpha}{3} \sqrt{8a_0 L^3}$.

- 7** Une balle de masse m est lancée avec une vitesse initiale v_0 depuis un point situé à une hauteur H au-dessus du sol. Son vecteur vitesse fait un angle α avec la verticale. On néglige la résistance de l'air. Déterminer la vitesse de la balle à son arrivée au sol.

☐ a. $v = \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gH}$ ☐ b. $v = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + 2gH}$

☐ c. $v = \sqrt{v_0^2 \tan^2 \alpha + 2gH}$ ☒ d. $v = \sqrt{v_0^2 + 2gH}$

La balle est soumise uniquement à son poids, force conservative. L'énergie potentielle dont elle dérive est telle que $dE_p = -\delta W = -m\vec{g} \cdot d\vec{l} = mgdz$ si l'axe Oz vertical est orienté vers le haut. On en déduit que $E_p = mgz + c$, c étant une constante (que l'on peut choisir nulle pour simplifier l'expression).

L'énergie mécanique se conserve. En plaçant l'origine O au niveau du sol :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgH = \frac{1}{2}mv^2 \text{ donc } v = \sqrt{v_0^2 + 2gH}.$$

- 8** Un wagonnet de masse m se déplace sans frottement sur un rail incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Il est lancé vers le haut avec une vitesse initiale v_0 . Déterminer la distance L parcourue avant de faire demi-tour.

☐ a. $L = \frac{v_0^2}{2g \tan \alpha}$ ☐ b. $L = \frac{v_0^2}{2g \cos \alpha}$

☐ c. $L = \frac{v_0^2 \tan \alpha}{2g}$ ☒ d. $L = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha}$

Le wagonnet est soumis à son poids et la réaction du support, qui ne travaille pas en l'absence de frottements. Comme dans la question précédente, le poids dérive de l'énergie potentielle $E_p = mgz + c$ en orientant l'axe Oz vertical vers le haut. La conservation de l'énergie mécanique conduit à $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0 = 0 + mgz_1$ si on note z_0 la cote initiale et z_1 la cote au moment du demi-tour. Or géométriquement, $\sin \alpha = \frac{z_1 - z_0}{L}$ donc $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgL \sin \alpha$ donc $L = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha}$.

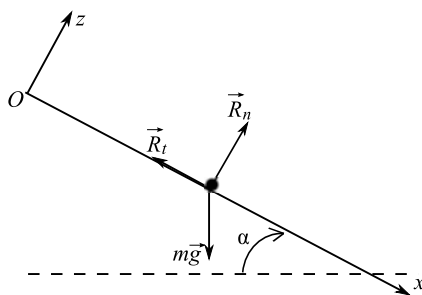
9 Un palet glisse sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale le long de la ligne de plus grande pente ; il existe une force de frottement telle que $\|\vec{R}_t\| = f \|\vec{R}_n\|$ avec $\vec{R}_n$ la réaction normale au plan et $\vec{R}_t$ la réaction tangentielle ; le coefficient de frottement f est une constante positive.

À l'instant initial, le palet est lancé vers le bas avec une vitesse de norme $\|\vec{v}\| = v_0$.

Le palet parcourt une distance L avant de s'arrêter. Utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour déterminer l'expression du coefficient de frottement.

- ☐ a. $f = \tan \alpha - \frac{v_0^2}{2Lg \cos \alpha}$ ☒ b. $f = \tan \alpha + \frac{v_0^2}{2Lg \cos \alpha}$
☐ c. $f = \tan \alpha - \frac{v_0^2}{2Lg \sin \alpha}$ ☐ d. $f = \tan \alpha + \frac{v_0^2}{2Lg \sin \alpha}$

Le palet est soumis au poids et à la réaction du support. Les forces qui travaillent sont le poids et la réaction tangentielle due aux frottements.



En projetant le principe fondamental de la dynamique sur la direction Oz perpendiculaire au support, $0 = -mg \cos \alpha + \|\vec{R}_n\|$ d'où on tire $\|\vec{R}_n\| = mg \cos \alpha$ puis $\|\vec{R}_t\| = fmg \cos \alpha$; on remarque que $\|\vec{R}_t\|$ est constante. D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W_{\vec{R}_t} + W_{m\vec{g}} = -fmg \cos \alpha L + mgL \sin \alpha$$

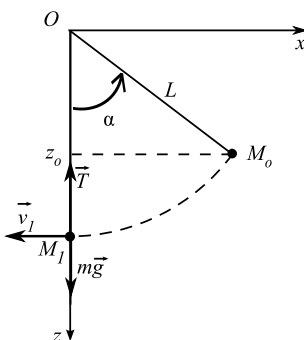
$$\text{d'où } f = \frac{\frac{1}{2}v_0^2 + gL \sin \alpha}{g \cos \alpha L} = \frac{v_0^2}{2g \cos \alpha L} + \tan \alpha.$$

- 10** Un point matériel M de masse m est accroché à un fil inextensible de masse négligeable et de longueur L . L'autre extrémité du fil est accrochée à un point O fixe.

À l'instant initial, l'angle entre la verticale descendante et le fil tendu est $\alpha = 45^\circ$, la vitesse est nulle. Déterminer la vitesse v_1 de M à l'instant où il passe au point le plus bas de la trajectoire, ainsi que la tension du fil à cet instant.

☐ a. $v_1 = \sqrt{gL\sqrt{2}}$ ☒ b. $v_1 = \sqrt{gL(2 - \sqrt{2})}$

☐ c. $\|\vec{T}\| = mg(1 + \sqrt{2})$ ☒ d. $\|\vec{T}\| = mg(3 - \sqrt{2})$



Le point matériel M est soumis à son poids et à la tension du fil ; tant que le fil est tendu, le mouvement, compte tenu des conditions initiales, est circulaire et la tension est perpendiculaire à la trajectoire, donc elle ne travaille pas ; le poids dérive de l'énergie potentielle $E_p = -mgz + c$ avec c une constante.



La verticale étant **orientée vers le bas**, $dE_p = -\delta W = -mgdz$.

L'énergie mécanique se conserve : à $t = 0$ $E_m = E_c + E_p = -mgz_0$ et pour le passage au point le plus bas $E_m = \frac{1}{2}mv_1^2 - mgz_1$ avec $z_0 = L \cos \alpha$ et $z_1 = L$.

On obtient $v_1^2 = 2g(z_1 - z_0) = 2gL(1 - \cos \alpha) = gL(2 - \sqrt{2})$.

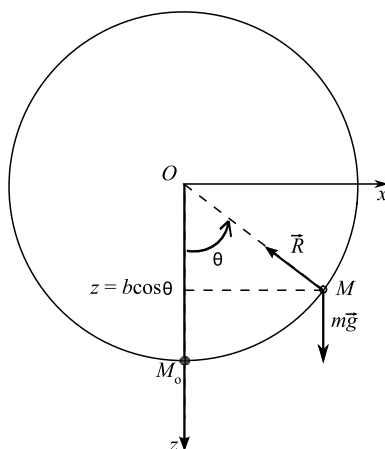
La tension se détermine en appliquant le principe fondamental de la dynamique :

$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$ avec pour le mouvement circulaire de rayon L , $\vec{a} \cdot \vec{u}_\rho = \vec{a} \cdot \vec{u}_z = -\frac{v_1^2}{L}$ lors du passage en bas de la trajectoire puisque le vecteur $\vec{u}_z$ est orienté vers le bas.

En projection sur Oz la relation s'écrit $m\vec{a} \cdot \vec{u}_z = -\frac{mv_1^2}{L} = mg - \|\vec{T}\|$ donc $\|\vec{T}\| = mg + \frac{mv_1^2}{L}$ et finalement $\|\vec{T}\| = mg + mg(2 - \sqrt{2})$.

- 11** Un anneau de masse m est enfilé sur un cercle de rayon b et de centre O dans le plan xOz vertical, l'axe Oz vertical étant dirigé vers le bas. À $t = 0$, l'anneau est lancé du point le plus bas du cercle avec une vitesse $\vec{v}_0$ tangente au cercle. Il n'y a pas de frottements. Déterminer l'énergie potentielle de l'anneau en fonction de l'angle $\theta = (\widehat{Oz, \overrightarrow{OM}})$ et en déduire l'expression de sa vitesse. On prendra l'énergie potentielle nulle pour $\theta = 0$.

☒ a. $E_p = mgb(1 - \cos \theta)$ ☐ b. $E_p = -mgb \sin \theta$
☒ c. $v = \sqrt{v_0^2 + 2gb(\cos \theta - 1)}$ ☐ d. $v = \sqrt{v_0^2 - 2gb \sin \theta}$



Le point matériel M est soumis à son poids et à la réaction du support ; le mouvement est circulaire et la réaction est perpendiculaire à la trajectoire, donc elle ne travaille pas ; comme dans la question précédente le poids dérive de l'énergie potentielle

$E_p = -mgz + c$ avec c une constante et $z = b \cos \theta$ soit $E_p = -mgb \cos \theta + c$. Avec la condition imposée, $c = mgb$ et donc $E_p = mgb(1 - \cos \theta)$.

Le poids étant une force conservative, l'énergie mécanique est constante donc :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgb(1 - \cos \theta) \text{ d'où on tire } v = \sqrt{v_0^2 + 2gb(\cos \theta - 1)}.$$

- 12** Un point matériel M de masse m se déplace sans frottement sur l'axe Ox horizontal. Il est accroché à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_v dont l'autre extrémité est fixée au point O . Déterminer l'expression de l'énergie potentielle élastique en fonction de x , k et l_v de façon à ce qu'elle soit nulle pour le ressort à vide. En déduire la longueur maximale du ressort si à $t = 0$, $x = 2l_v$ et $\|\vec{v}\| = l_v \sqrt{\frac{k}{m}}$.

☐ a. $E_p = kx(x - l_v)$ ☒ b. $E_p = \frac{1}{2}k(x - l_v)^2$
☐ c. $l_{\max} = 2l_v$ ☒ d. $l_{\max} = l_v(1 + \sqrt{2})$

Le point matériel M est soumis à son poids, à la tension du ressort et à la réaction du support ; le mouvement est horizontal, le poids est vertical donc il ne travaille pas, la réaction est perpendiculaire au support donc elle ne travaille pas non plus.

Le travail élémentaire de la tension est $\delta W = \vec{T} \cdot d\vec{l} = -k(l - l_v)\vec{u}_x \cdot dx\vec{u}_x = -k(x - l_v)dx$. La tension dérive d'une énergie potentielle E_p calculée à partir de $dE_p = -\delta W = k(x - l_v)dx$.

On obtient $E_p = \frac{1}{2}k(x - l_v)^2$ en faisant le choix d'une énergie potentielle nulle pour le ressort à vide.

L'unique force qui travaille dérive d'une énergie potentielle donc l'énergie mécanique est constante ce qui conduit à $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k(2l_v - l_v)^2 = 0 + \frac{1}{2}k(l_{\max} - l_v)^2$.

En remplaçant v_0 par $l_v\sqrt{\frac{k}{m}}$ on arrive à $\frac{1}{2}l_v^2k + \frac{1}{2}kl_v^2 = \frac{1}{2}k(l_{\max} - l_v)^2$ soit finalement $l_{\max} = l_v(1 + \sqrt{2})$, seule solution positive.

13 Un satellite de masse m assimilé à un point matériel est sur une trajectoire plane dans

le plan équatorial terrestre ; il est soumis à la force de gravitation $\vec{F} = -\frac{mg_0R_T^2}{\rho^2}\vec{u}_\rho$ en coordonnées polaires dans ce plan (R_T est le rayon terrestre, g_0 est la norme du champ de gravitation à la surface de la Terre). Déterminer le travail élémentaire $\delta W_{\vec{F}}$ et en déduire l'énergie potentielle dont dérive $\vec{F}$ en considérant qu'elle est nulle à très grande distance.

☒ a. $\delta W_{\vec{F}} = -\frac{mg_0R_T^2}{\rho^2}d\rho$ ☐ b. $\delta W_{\vec{F}} = \frac{mg_0R_T^2}{\rho^2}d\rho$

☒ c. $E_p = -\frac{mg_0R_T^2}{\rho}$ ☐ d. $E_p = \frac{mg_0R_T^2}{\rho}$

En coordonnées polaires, le déplacement élémentaire $d\vec{l}$ est égal à $d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta$ dans le plan polaire que l'on choisit confondu avec le plan équatorial terrestre donc le travail élémentaire a pour expression

$$\delta W_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\frac{mg_0R_T^2}{\rho^2}\vec{u}_\rho \cdot (d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta) = -\frac{mg_0R_T^2}{\rho^2}d\rho.$$

L'énergie potentielle a pour différentielle $dE_p = -\delta W_{\vec{F}} = \frac{mg_0R_T^2}{\rho^2}d\rho$ et par intégration

$E_p = -\frac{mg_0R_T^2}{\rho} + c$. La constante c doit être choisie nulle pour que l'énergie soit nulle à très grande distance.

- 14** Le satellite de la question 13 est sur une trajectoire circulaire de rayon R . En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer sa vitesse et en déduire l'expression de son énergie mécanique.

☐ a. $v = R \sqrt{\frac{g_0}{R_T}}$ ☒ b. $v = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R}}$
☒ c. $E_M = -\frac{mg_0 R_T^2}{2R}$ ☐ d. $E_M = \frac{mg_0 R_T^2}{2R}$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au satellite s'écrit en référentiel galiléen : $m\vec{a} = \vec{F} = -\frac{mg_0 R_T^2}{\rho^2} \vec{u}_\rho$.

Pour un mouvement circulaire, en projetant sur $\vec{u}_\rho$: $-m\rho \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -m\frac{v^2}{\rho} = -\frac{mg_0 R_T^2}{\rho^2}$.

Comme $\rho = R$ on arrive à $v^2 = \frac{g_0 R_T^2}{R}$ donc $v = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R}}$.

En utilisant l'expression de l'énergie potentielle de la question précédente :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m \frac{g_0 R_T^2}{R} - \frac{mg_0 R_T^2}{R} = -\frac{mg_0 R_T^2}{2R}.$$

13 Équilibres

VRAI/FAUX

1 Conditions d'équilibre

☐ V ☒ F a. Si la somme des forces est nulle un système est nécessairement en équilibre.

D'après le principe fondamental de la dynamique, $\Sigma \vec{F} = m\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}$ constante ; le système est en mouvement rectiligne uniforme dans le cas général ; il est en équilibre uniquement si à l'instant initial il est déjà immobile. Il s'agit d'une condition nécessaire, mais non suffisante.

☒ V ☐ F b. Quand les forces sont conservatives, on peut déterminer la position d'équilibre grâce à l'énergie potentielle.

Les extrema d'énergie potentielle correspondent aux positions d'équilibre. En effet $dE_p = \delta W = -\vec{F} \cdot d\vec{l}$; par exemple pour un point mobile sur l'axe Ox , $dE_p = -F_x dx$.

La condition nécessaire d'équilibre étant $F_x = 0$, $\frac{dE_p}{dx} = 0$ à l'équilibre.

2 Équilibre stable

☐ V ☒ F a. Un équilibre est d'autant plus stable que son énergie potentielle est grande.

Pour qu'un équilibre soit stable, il faut que le point, légèrement écarté de cette position, tende à y revenir. En reprenant l'exemple précédent, si le point est déplacé vers la droite de long de Ox ($dx > 0$), il faut que la force soit dirigée vers la gauche ($F_x < 0$) et inversement. Donc, dans tous les cas, $dE_p > 0$ en partant de l'équilibre, c'est-à-dire que l'énergie potentielle augmente quand on s'éloigne d'une position d'équilibre stable. Elle y est donc minimale, et non maximale.

☒ V ☐ F **b.** Dans le cas de forces conservatives, si on écarte légèrement un système d'une position d'équilibre stable, il tend à effectuer des oscillations autour de cette position.

Qualitativement, le système est soumis au voisinage de cette position à une force de rappel ; en linéarisant l'expression de cette force, on obtient l'analogie de la tension d'un ressort. La solution de l'équation différentielle du mouvement est alors de type oscillatoire.

QCM

3 Deux points A et B de l'axe horizontal Ox sont distants de D . Un point matériel M de masse m est relié à A par un fil inextensible de longueur $L > \frac{D}{2}$ et à B par un fil inextensible de même longueur L . On note $\vec{T}_A$ la tension exercée sur M par le fil accroché en A et $\vec{T}_B$ la tension exercée sur M par le fil accroché en B . On suppose la masse des deux fils négligeable. Déterminer si à l'équilibre :

- ☐ a. $\|\vec{T}_A\| = \frac{mg}{2}$ ☐ b. $\|\vec{T}_A\| = \frac{mgL}{2D}$
☐ c. $\|\vec{T}_A\| = \frac{mgL}{D}$ ☒ d. $\|\vec{T}_A\| = \frac{mgL}{\sqrt{4L^2 - D^2}}$

Le point M est soumis à son poids et aux tensions des deux fils ; à l'équilibre

$$m\vec{g} + \vec{T}_A + \vec{T}_B = \vec{0}.$$

Les deux fils ayant la même longueur, le triangle ABM est isocèle. Soit α l'angle $\widehat{BAM}$.

Projection sur Ox : $-T_A \cos \alpha + T_B \cos \alpha = 0$ donc $T_A = T_B$

Projection sur Oz : $T_A \sin \alpha + T_B \sin \alpha - mg = 0$ avec $T_A = T_B$ donc $T_A = \frac{mg}{2 \sin \alpha}$.

Or $\cos \alpha = \frac{D}{2L}$ donc $\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{D}{2L}\right)^2}$. En remplaçant on obtient

$$T_A = \frac{mg}{2 \sqrt{1 - \left(\frac{D}{2L}\right)^2}} = \frac{mgL}{\sqrt{4L^2 - D^2}}.$$

- 4** Un point matériel M de masse m est suspendu à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_v ; déterminer la longueur du ressort à l'équilibre l_{eq} et la période des oscillations autour de la position d'équilibre.

☐ a. $l_{eq} = l_v - \frac{mg}{k}$ ☒ b. $l_{eq} = l_v + \frac{mg}{k}$
☐ c. $T = 2\pi \sqrt{\frac{k}{m}}$ ☒ d. $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

Le point M est soumis à son poids et à la tension du ressort.

À l'équilibre $m\vec{g} + \vec{T} = \vec{0}$. En projection sur l'axe Oz orienté vers le bas $mg - k(l_{eq} - l_v) = 0$ donc $l_{eq} = l_v + \frac{mg}{k}$. Le ressort est allongé à l'équilibre, ce qui paraît réaliste.

L'équation du mouvement est $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$. En plaçant l'origine de l'axe à l'extrémité du ressort $m\frac{d^2z}{dt^2} = -k(z - l_v) + mg = -k(z - l_{eq})$. On pose $Z = z - l_{eq}$: alors $\frac{d^2Z}{dt^2} + \frac{k}{m}Z = 0$.

Cette équation a pour solution, si on pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $Z(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$. Il s'agit d'oscillations sinusoïdales de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$.

- 5** Un point matériel M de masse m est posé sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Déterminer les composantes de la réaction à l'équilibre.

☐ a. $|R_n| = mg \sin \alpha$ ☒ b. $|R_n| = mg \cos \alpha$
☒ c. $|R_t| = mg \sin \alpha$ ☐ d. $|R_t| = mg \cos \alpha$

Le point M est soumis à son poids et à la réaction du support. La condition nécessaire d'équilibre est $\vec{R} + m\vec{g} = \vec{0}$.

En projetant sur la normale au plan : $R_n - mg \cos \alpha = 0$.

En projetant sur la ligne de plus grande pente : $R_t + mg \sin \alpha = 0$. $R_t < 0$ donc la composante tangentielle est dirigée vers le haut, c'est elle qui empêche le point M de glisser.

On remarque la nécessité de l'existence de frottements pour maintenir l'équilibre.

- 6** Un point matériel M de masse m est posé sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Il est fixé au bout d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_v dont l'autre extrémité est le point O en haut du plan. Les frottements sont supposés négligeables. Déterminer la longueur du ressort à l'équilibre l_{eq} et le module de la réaction $\|\vec{R}\|$ exercée par le support.

☒ a. $l_{eq} = l_v + \frac{mg \sin \alpha}{k}$ ☐ b. $l_{eq} = l_v + \frac{mg \cos \alpha}{k}$
☐ c. $\|\vec{R}\| = mg \sin \alpha$ ☒ d. $\|\vec{R}\| = mg \cos \alpha$

Le point M est soumis à son poids, à la réaction du support et à la tension du ressort. La réaction est perpendiculaire au plan en l'absence de frottements.

La condition nécessaire d'équilibre est $\vec{R} + m\vec{g} + \vec{T} = \vec{0}$.

En projetant sur la normale au plan : $\|\vec{R}\| - mg \cos \alpha = 0$.

En projetant sur la ligne de plus grande pente : $mg \sin \alpha - k(l_{eq} - l_v) = 0$.

- 7** Deux ressorts de masse négligeable, de raideur k et de longueur à vide $\frac{l_v}{2}$ sont fixés entre 2 points A et B de l'axe Ox horizontal d'abscisses respectives $-\frac{l_v}{2}$ et $\frac{l_v}{2}$. On ajoute entre les deux ressorts un point M de masse m .

Pour quelle valeur de m la longueur totale du ressort à l'équilibre est-elle égale à $\frac{3}{2}l_v$?

- ☐ a. $m = \frac{kl_v}{2g}$ ☐ b. $m = \frac{kl_v}{3g}$
☒ c. $m = \frac{kl_v \sqrt{5}}{6g}$ ☐ d. $m = \frac{kl_v \sqrt{5}}{5g}$

Le point M est soumis à son poids ainsi qu'aux tensions $\vec{T}_A$ et $\vec{T}_B$ des deux ressorts ; à l'équilibre $m\vec{g} + \vec{T}_A + \vec{T}_B = \vec{0}$. Compte tenu de la symétrie, l'allongement des deux ressorts est le même et

$$\|\vec{T}_A\| = \|\vec{T}_B\| = k \left(\frac{3l_v}{4} - \frac{l_v}{2} \right) = \frac{kl_v}{4}.$$

On projette sur la verticale pour obtenir la relation donnant la masse :

$$-mg + 2 \|\vec{T}_A\| \cos \beta = 0$$

en notant β l'angle de chaque ressort avec la verticale.

$$\sin \beta = \frac{AO}{AM} = \frac{\frac{l_v}{2}}{\frac{3l_v}{4}} = \frac{2}{3} \text{ d'où } \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ et enfin } mg = \frac{kl_v \sqrt{5}}{6}.$$

- 8** Un point matériel M de masse m peut se déplacer sur l'axe Ox horizontal. Il est lié à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_v dont l'autre extrémité est fixée en A sur l'axe Oz vertical, à une distance H au-dessus du point O . On suppose qu'il n'y a pas de frottements. Déterminer la valeur x_{eq} à l'équilibre dans le cas où $l_v < H$. Étudier la stabilité de l'équilibre à l'aide d'un raisonnement énergétique.

- ☒ a. $x_{eq} = 0$ ☐ b. $x_{eq} = \sqrt{H^2 - l_v^2}$
☒ c. L'équilibre est stable. ☐ d. L'équilibre est instable.

Le point M est soumis à son poids, à la tension du ressort et à la réaction du support.

La réaction et le poids sont perpendiculaires à l'axe Ox et n'interviennent donc pas sur la condition d'équilibre. La tension du ressort est une force conservative, on peut utiliser l'énergie potentielle pour trouver la position d'équilibre et déterminer si elle est stable ou non.

L'énergie potentielle élastique peut être mise sous la forme $E_p = \frac{1}{2}k(l - l_v)^2$ avec

$$l = \sqrt{H^2 + x^2} \text{ donc } E_p = \frac{1}{2}k(H^2 + x^2 + l_v^2 - 2l_v \sqrt{H^2 + x^2}).$$

Dérivons pour déterminer s'il existe un extremum d'énergie potentielle :

$$\frac{dE_p}{dx} = k \left(x - l_v \frac{x}{\sqrt{H^2 + x^2}} \right) = kx \left(1 - \frac{l_v}{\sqrt{H^2 + x^2}} \right) = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ ou } l_v = \sqrt{H^2 + x^2}.$$

Or $l_v < H$ donc la seule solution est $x = 0$.

$$\text{Comme } \left(1 - \frac{l_v}{\sqrt{H^2 + x^2}} \right) > 0, \text{ pour } x < 0, kx \left(1 - \frac{l_v}{\sqrt{H^2 + x^2}} \right) < 0$$

et pour $x > 0$ $kx \left(1 - \frac{l_v}{\sqrt{H^2 + x^2}} \right) > 0$, l'énergie potentielle est donc décroissante puis croissante, il s'agit d'un minimum et l'équilibre est stable.

9

Un point matériel M de masse m peut se déplacer sur l'axe Ox horizontal. Il est lié à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_v dont l'autre extrémité est fixée en A sur l'axe Oz vertical, à une distance H au-dessus du point O . On suppose qu'il n'y a pas de frottements. Déterminer la position d'équilibre stable dans le cas où $l_v > H$.

☐ a. $x_{eq} = 0$

☐ b. $x_{eq} = l_v$

☒ c. $x_{eq} = \sqrt{l_v^2 - H^2}$

☐ d. $x_{eq} = \sqrt{l_v^2 + H^2}$

L'analyse du problème est similaire à celle de la question 8 mais cette fois-ci, l'équation

$$\frac{dE_p}{dx} = kx \left(1 - \frac{l_v}{\sqrt{H^2 + x^2}} \right) = 0 \text{ a deux solutions : } x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{H^2 - l_v^2}.$$

Comme $\left(1 - \frac{l_v}{\sqrt{H^2 + x^2}} \right) < 0$ la solution $x = 0$ correspond maintenant à un équilibre instable.

Au voisinage de $x_{eq} = \sqrt{l_v^2 - H^2} > 0$, $\frac{dE_p}{dx} > 0$ pour $l_v^2 < H^2 + x^2$ c'est-à-dire $x > x_{eq}$

et $\frac{dE_p}{dx} < 0$ pour $x < x_{eq}$.

L'énergie potentielle est donc décroissante puis croissante, il s'agit d'un minimum et l'équilibre est stable.

- 10** Un point matériel M de masse m est fixé à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur L . Sa position est repérée grâce à l'angle θ entre l'axe Oz vertical descendant et le vecteur $\overrightarrow{OM}$. Le point M est lâché sans vitesse initiale. Déterminer la fréquence f des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable.

☐ a. $f = \sqrt{\frac{g}{L}}$ ☐ b. $f = 2\pi \sqrt{\frac{g}{L}}$

☐ c. $f = \sqrt{\frac{g}{2\pi L}}$ ☒ d. $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$

On suppose que le fil reste tendu au cours du mouvement, le point M se déplace alors sur un cercle. La seule force qui travaille est le poids puisque la tension est perpendiculaire au cercle. La position d'équilibre stable correspond au minimum d'énergie potentielle.

Le poids dérive de l'énergie potentielle $E_p = -mgz + c$ avec c une constante (la verticale étant orientée vers le bas, $dE_p = -\delta W = -mgdz$).

L'équilibre stable correspond au point le plus bas du cercle, soit $\theta = 0$.

L'énergie mécanique se conserve donc $\frac{dE_M}{dt} = 0 = \frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt}$ avec pour le mouvement circulaire $E_c = \frac{1}{2}m\left(L\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ et $E_p = -mgL \cos \theta + c$.

Après dérivation par rapport au temps $mL^2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgL \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = 0$.

Au voisinage de $\theta = 0$, $\sin \theta \approx \theta$ donc l'équation du mouvement est $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$; en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ les solutions sont de la forme $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$.

La fréquence des oscillations est $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$.

- 11** Un point matériel M de masse m est posé sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Il est fixé à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur L dont l'autre extrémité est un point O en haut du plan. Les frottements sont supposés négligeables. Déterminer la tension du fil à l'équilibre et la pulsation des petites oscillations autour de la position d'équilibre.

☒ a. $\|\vec{T}\| = mg \sin \alpha$ ☐ b. $\|\vec{T}\| = mg \cos \alpha$

☒ c. $\omega_0 = \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{L}}$ ☐ d. $\omega_0 = \sqrt{\frac{g \cos \alpha}{L}}$

Comme dans la question précédente, le point M se déplace sur un cercle. La seule force qui travaille est le poids, la position d'équilibre stable correspond au minimum d'énergie potentielle, c'est le point le plus bas du cercle.

Dans le plan de la trajectoire, la composante « utile » du poids est $mg \sin \alpha$; la relation d'équilibre projetée sur $\vec{u}_p$ s'écrit $0 = -\|\vec{T}\| + mg \sin \alpha$ et, par analogie avec la question

précédente, $E_p = -mg \sin \alpha L \cos \theta + c$ donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{L}}$.

- 12** Un point matériel M de masse m peut se déplacer le long d'un profil ondulé d'équation $z = b \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right)\right)$, l'axe Oz étant dirigé suivant la verticale ascendante et l'axe Ox étant horizontal. Déterminer les valeurs de x correspondant à des positions d'équilibre stables ainsi que la période T des oscillations autour de ces positions. On supposera qu'il n'y a pas de frottements.

☒ a. $x = n\lambda$ avec $n \in \mathbb{Z}$ ☐ b. $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$ avec $n \in \mathbb{Z}$

☐ c. $T = 2\pi \sqrt{\frac{\sqrt{b\lambda}}{g}}$ ☒ d. $T = \frac{\lambda}{\sqrt{gb}}$

La seule force qui travaille est le poids, qui dérive de l'énergie potentielle $E_p = mgz + c$ avec c une constante (la verticale étant orientée vers le haut, $dE_p = -\delta W = mgdz$).

La position d'équilibre stable correspond au minimum d'énergie potentielle soit $z = b \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right)\right)$ minimum, donc pour $\cos \left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) = 1$ c'est-à-dire $2\pi \frac{x}{\lambda} = 2n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Par exemple pour $x \approx 0$,

$$\cos \left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \approx 1 - \frac{1}{2} \left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right)^2 = 1 - 2 \left(\pi \frac{x}{\lambda}\right)^2$$

donc $E_p \approx 2mgb \left(\pi \frac{x}{\lambda}\right)^2$.

L'énergie cinétique est égale à $\frac{m}{2} \left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right)$ avec $z \approx 2b \left(\pi \frac{x}{\lambda}\right)^2 \ll x$ donc on néglige le déplacement vertical.

D'après la conservation de l'énergie mécanique, $E_M = E_c + E_p$ est une constante donc

$$\frac{d \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2mgb \left(\pi \frac{x}{\lambda}\right)^2 \right]}{dt} = 0$$

soit

$$m \left(\frac{dx}{dt}\right) \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + 4mgb \frac{\pi^2}{\lambda^2} x \left(\frac{dx}{dt}\right) = 0$$

qui donne après simplification $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + 4gb \frac{\pi^2}{\lambda^2} x = 0$; la pulsation des oscillations est ω_0

telle que $\omega_0^2 = 4gb \frac{\pi^2}{\lambda^2} = 4 \frac{\pi^2}{T^2}$ donc $T = \frac{\lambda}{\sqrt{gb}}$.

- 13** Un point matériel M de masse m peut se déplacer sur l'axe Ox horizontal. Il n'y a pas de frottements. Son énergie potentielle est de la forme $E_p = \frac{k}{2x^2} - \frac{c}{x}$ où k et c sont des constantes positives. Déterminer la position d'équilibre repérée par x_{eq} et étudier sa stabilité.

☐ a. $x_{eq} = \frac{k}{2c}$

☒ b. $x_{eq} = \frac{k}{c}$

☒ c. L'équilibre est stable. ☐ d. L'équilibre est instable.

On étudie la fonction énergie potentielle : sa dérivée est $\frac{dE_p}{dx} = -\frac{k}{x^3} + \frac{c}{x^2}$. Elle s'annule pour $x_{eq} = \frac{k}{c}$. On détermine ensuite le sens de variation : $\frac{dE_p}{dx} > 0$ pour $\frac{c}{x^2} > \frac{k}{x^3}$ donc si $x > x_{eq}$.

La fonction est décroissante pour $x < x_{eq}$ et croissante pour $x > x_{eq}$, elle passe par un minimum à l'équilibre qui est donc stable.

- 14** Un point matériel M de masse m peut se déplacer sur l'axe Ox horizontal. Il n'y a pas de frottements. Son énergie potentielle est de la forme $E_p = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{c}{x}$ où k et c sont des constantes positives. Déterminer la position d'équilibre repérée par x_{eq} et la pulsation des petites oscillations autour de la position d'équilibre.

☐ a. $x_{eq} = \left(\frac{2c}{k}\right)^{\frac{1}{3}}$ ☒ b. $x_{eq} = \left(\frac{c}{k}\right)^{\frac{1}{3}}$

☐ c. $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ ☒ d. $\omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$

On utilise le même raisonnement : $\frac{dE_p}{dx} = kx - \frac{c}{x^2}$. Elle s'annule pour $x_{eq} = \left(\frac{c}{k}\right)^{\frac{1}{3}}$. On détermine ensuite le sens de variation : $\frac{dE_p}{dx} > 0$ pour $x > x_{eq}$.

La fonction est décroissante pour $x < x_{eq}$ et croissante pour $x > x_{eq}$, elle passe par un minimum à l'équilibre qui est donc stable. On dérive par rapport au temps l'équation de conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{c}{x} \right] = 0$$

soit $m \left(\frac{dx}{dt} \right) \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right) + \left(\frac{dx}{dt} \right) \left(kx - \frac{c}{x^2} \right) = 0$.

Au voisinage de la position d'équilibre, $x = x_{eq}(1 + \varepsilon)$ avec $\varepsilon \ll 1$ donc

$$kx - \frac{c}{x^2} = kx_{eq}(1 + \varepsilon) - \frac{c}{(x_{eq}(1 + \varepsilon))^2};$$

en approximant $(1 + \varepsilon)^{-2}$ par $1 - 2\varepsilon$ au premier ordre en ε , $kx - \frac{c}{x^2} \approx kx_{eq}\varepsilon + \frac{2c\varepsilon}{(x_{eq})^2}$.

L'équation du mouvement devient si $\varepsilon \ll 1$: $m \left(\frac{d^2 x_{eq} \varepsilon}{dt^2} \right) + kx_{eq}\varepsilon + \frac{2c\varepsilon}{(x_{eq})^2} = 0$. Après

simplification par $m x_{eq}$: $\left(\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} \right) + \frac{1}{m} \left(k + \frac{2c}{(x_{eq})^3} \right) \varepsilon = 0$.

Comme $x_{eq} = \left(\frac{c}{k} \right)^{\frac{1}{3}}$, $\left(\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} \right) + \frac{1}{m} 3k\varepsilon = 0$, l'équation est donc de la forme

$$\left(\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} \right) + \omega_0^2 \varepsilon = 0 \text{ en posant } \omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

14 Oscillateurs

VRAI/FAUX

1 Oscillateurs harmoniques

☒ V ☐ F a. Soit un point matériel de masse m suspendu à un ressort. Comme pour le mouvement horizontal sur un guide sans frottement, la période des oscillations verticales est égale à $2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$.

L'équation du mouvement vertical, en projection sur l'axe Oz orienté vers le bas, est $m \frac{d^2 z}{dt^2} = -k(z - l_v) + mg$.

Si on pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ elle devient $\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 l_v + g$ et a pour solution générale $z(t) = l_v + \frac{g}{\omega_0^2} + A \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

Le système oscille donc avec la période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$.

Par rapport à un mouvement guidé horizontal, la position moyenne autour de laquelle se font les oscillations est décalée vers le bas, mais la période est identique.

☒ V ☐ F b. Soit un point matériel accroché au bout d'un fil inextensible de longueur L . Le point matériel est lâché sans vitesse initiale. On suppose que le fil reste tendu et que la résistance de l'air est négligeable. L'équation différentielle pour les petites oscillations au voisinage de la position d'équilibre stable est alors : $\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0$.

Repérons la position du point matériel par l'angle θ entre la verticale descendante et le fil supposé tendu. La vitesse initiale étant supposée nulle, la trajectoire est une portion de cercle. La conservation de l'énergie mécanique du système se traduit par l'équation

$$E_M = E_c + E_p = \frac{1}{2}m \left(L \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mgL(1 - \cos \theta) \text{ en prenant l'énergie potentielle nulle au point le plus bas de la trajectoire.}$$

En dérivant par rapport au temps l'énergie mécanique, qui se conserve et donc est une constante, on obtient l'équation $0 = mL^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) + mgL \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)$ qui après simplification donne : $0 = L \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) + g \sin \theta$.

La position d'équilibre stable θ_{eq} correspond au minimum de l'énergie potentielle soit $mgL(1 - \cos \theta)$ minimal : ceci correspond à $\theta_{eq} = 0$.

Au voisinage de zéro, $\sin \theta \approx \theta$ d'où $0 = L \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) + g\theta$.

☐ V ☒ F c. L'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique est proportionnelle à l'amplitude des oscillations.

Prenons pour modèle un oscillateur constitué d'un point matériel lié à un ressort, en mouvement guidé sur un axe Ox horizontal. L'équation horaire de ce mouvement est de la forme $x(t) = l_v + A \cos(\omega_0 t + \varphi)$. L'énergie cinétique du système est

$$E_c = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2}mA^2 (-\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi))^2 = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

et son énergie potentielle est

$$E_p = \frac{1}{2}k(x - l_v)^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi).$$

L'énergie mécanique est donc égale à $E_M = E_c + E_p = \frac{1}{2}kA^2$, elle est proportionnelle au carré de l'amplitude des oscillations.

2 Oscillateurs amortis

☒ V ☐ F a. L'amplitude des oscillations libres d'un oscillateur réel décroît à cause des frottements.

Les frottements introduisent dans l'équation différentielle un terme supplémentaire en $-\alpha \frac{dx}{dt}$ si on prend le modèle du pendule élastique avec frottement linéaire. Le coefficient α est d'autant plus grand que les frottements sont importants. L'équation caractéristique associée à l'équation $m \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + k(x - l_v) = 0$ est alors $r^2 + \frac{\alpha}{m}r + \frac{k}{m} = 0$, et son discriminant

vaut $\Delta = \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}$. Les racines sont complexes dans le cas où le discriminant est négatif, de la forme $r = \frac{-\alpha}{2m} \pm \frac{j\sqrt{|\Delta|}}{2}$. Elles sont réelles et négatives dans le cas où le discriminant est positif, de la forme $r = \frac{-\alpha}{2m} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$. Il apparaît donc toujours dans la solution un facteur multiplicatif en $e^{-\frac{\alpha t}{2m}}$ correspondant à un amortissement des oscillations.

☐ V ☒ F **b.** L'amplitude des oscillations forcées d'un oscillateur amorti est maximale quand la force appliquée a pour fréquence la fréquence propre du système.

Si on procède par analogie avec ce qui se passe en électricité pour un circuit *RLC* série, la résonance d'élongation correspond à la résonance de tension aux bornes du condensateur. Celle-ci, quand elle existe, est décalée par rapport à la résonance d'intensité, qui elle a lieu pour la fréquence propre du système.

QCM

3 Deux ressorts de même longueur à vide l_v et de même raideur k sont mis bout à bout. Le premier ressort est fixé au point O , origine du repère. Le deuxième ressort est fixé au point A de l'axe horizontal Ox . La distance $OA = L$ entre les deux extrémités est fixe. Un point matériel M de masse m est accroché au point de jonction des deux ressorts et se déplace sans frottement sur l'axe Ox . Soit $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. La pulsation propre de l'oscillateur harmonique obtenu est :

- ☐ a. $\frac{\omega_1}{2}$ ☐ b. $\frac{\omega_1}{\sqrt{2}}$ ☒ c. $\sqrt{2}\omega_1$ ☐ d. $2\omega_1$

Le point M est soumis aux tensions $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ des deux ressorts, seules forces ayant une composante horizontale non nulle.

En projection sur l'axe Ox , $m\frac{d^2x}{dt^2} = T_{1x} + T_{2x} = -k(l_1 - l_v) + k(l_2 - l_v)$ où l_i est la longueur du ressort n° i. Or $l_1 = \overline{OM} = x$ et $l_2 = \overline{MA} = L - x$ donc l'équation différentielle s'écrit $m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - l_v) + k(L - x - l_v) = -2kx + kL$ est après simplification : $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\omega_1^2x = \omega_1^2L$.

En posant $\omega_0^2 = 2\omega_1^2$, on arrive à $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = \omega_0^2\frac{L}{2}$ de solution $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{L}{2}$ donc la pulsation des oscillations est $\omega_0 = \sqrt{2}\omega_1$.

4 Deux ressorts de même longueur à vide l_v et de même raideur k sont mis bout à bout. Le premier ressort est fixé au point O , origine du repère. Un point matériel M de masse m est fixé à l'extrémité de l'ensemble et se déplace sur l'axe Ox horizontal. Il n'y a pas

de frottements. On pose $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. La pulsation propre de l'oscillateur harmonique obtenu est :

- ☐ a. $\frac{\omega_1}{2}$ ☒ b. $\frac{\omega_1}{\sqrt{2}}$ ☐ c. $\sqrt{2}\omega_1$ ☐ d. $2\omega_1$

Soit N le point de jonction des deux ressorts. Il subit des tensions de normes égales de la part de chacun des ressorts. Or $l_1 = \overline{ON} = x_N$ et $l_2 = \overline{NM} = x - x_N$ donc $k(x_N - l_v) = k(x - x_N - l_v)$ d'où on tire $x_N = \frac{x}{2}$.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à M , en projection sur Ox , s'écrit alors : $m \frac{d^2x}{dt^2} = -k\left(\frac{x}{2} - l_v\right) = -\frac{k}{2}(x - 2l_v)$. Les deux ressorts sont par conséquent équivalents à un unique ressort de raideur $\frac{k}{2}$ et de longueur à vide $2l_v$. En posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{2m}}$ on obtient : $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 2\omega_0^2 l_v$, dont les solutions sont de la forme $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + 2l_v$. La pulsation des oscillations est donc égale à $\omega_0 = \frac{\omega_1}{\sqrt{2}}$.

- 5** Un point matériel M de masse m en mouvement sur l'axe Ox horizontal est soumis à l'action d'un ressort de raideur k accroché en O . Sachant qu'à $t = 0$ l'allongement du ressort est égal à b et que le point matériel est lancé avec une vitesse initiale v_0 , déterminer l'amplitude A des oscillations.

- ☐ a. $A = b$ ☐ b. $A = \frac{v_0}{\omega_0}$
☐ c. $A = b + \frac{v_0}{\omega_0}$ ☒ d. $A = \sqrt{b^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$

Par analogie avec la question 4, l'équation différentielle du mouvement est

$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - l_v)$ qui se met sous la forme $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 l_v$ en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Les solutions sont de la forme $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + l_v$ et compte tenu des conditions initiales on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x_{t=0} = l_v + b = A \cos \varphi + l_v \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = v_0 = -A\omega_0 \sin \varphi \end{cases} \quad \text{d'où on tire en éliminant } \varphi : A = \sqrt{b^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}.$$

- 6** Déterminer l'énergie du système de la question 5 en fonction de l'amplitude A des oscillations.

- ☐ a. $E_M = 2kA$ ☐ b. $E_M = \frac{kA}{2}$
☒ c. $E_M = \frac{1}{2}kA^2$ ☐ d. $E_M = 2kA^2$

L'énergie du point M est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle élastique, avec $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2(\sin(\omega_0 t + \varphi))^2$

et $E_p = \frac{1}{2}k(x - l_v)^2 = \frac{1}{2}kA^2(\cos(\omega_0 t + \varphi))^2$. Or $m\omega_0^2 = k$ donc $E_M = \frac{1}{2}kA^2$. L'énergie est donc proportionnelle au carré de l'amplitude des oscillations.

Remarque : les propositions $E_M = 2kA$ et $E_M = \frac{kA}{2}$ ne sont pas homogènes (le produit kA a la dimension d'une force) donc ne peuvent pas être justes.

- 7** Un point matériel M de masse m en mouvement sur l'axe Ox horizontal est soumis à l'action d'un ressort de raideur k accroché en un point A de l'axe Ox . À $t = 0$ l'allongement du ressort est nul et le point matériel est immobile. On posera $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Pour $t > 0$ le point A est animé d'un mouvement horizontal : $x_A = b \sin(\omega t)$ avec par hypothèse $\omega \neq \omega_0$. Déterminer l'équation différentielle du mouvement sachant qu'il n'y a pas de frottements.

☐ a. $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 l_v$

☒ b. $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 (b \sin(\omega t) + l_v)$

☐ c. $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega^2 (b \sin(\omega t) + l_v)$

☐ d. $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega^2 b \sin(\omega t) + \omega_0^2 l_v$

Le point M est soumis à la tension du ressort, au poids et à la réaction de l'axe. En projection sur l'axe Ox , $m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(l - l_v) = -k(\overline{AM} - l_v) = -k(\overline{AO} + x - l_v)$ donc l'équation différentielle du mouvement est $m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = k(b \sin(\omega t) + l_v)$ et après mise en forme : $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 (b \sin(\omega t) + l_v)$. C'est une équation d'oscillateur harmonique forcé.

- 8** En reprenant les hypothèses de la question 7, déterminer l'élongation du ressort $X(t) = x(t) - l_v$.

☐ a. $X(t) = \frac{b\omega_0(\omega \sin \omega_0 t - \omega_0 \sin \omega t)}{\omega^2 + \omega_0^2}$

☐ b. $X(t) = \frac{b\omega_0(\omega \sin \omega_0 t + \omega_0 \sin \omega t)}{\omega^2 + \omega_0^2}$

☐ c. $X(t) = \frac{b\omega_0(\omega \sin \omega_0 t + \omega_0 \sin \omega t)}{\omega^2 - \omega_0^2}$

☒ d. $X(t) = \frac{b\omega_0(\omega \sin \omega_0 t - \omega_0 \sin \omega t)}{\omega^2 - \omega_0^2}$

L'oscillateur étant non amorti, il faut tenir compte à la fois de la solution homogène et de la solution particulière.

La solution de l'équation homogène est de la forme $x_H(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$ et une solution particulière est $x_p(t) = l_v + B \sin \omega t$. En reportant $x_p(t)$ dans l'équation, on arrive à

$$B = \frac{b\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

La solution générale est donc $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) + l_v + \frac{b\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t)$. D'après les conditions initiales, à $t = 0$: $\begin{cases} l_v = A \sin(\varphi) + l_v \\ 0 = A\omega_0 \cos(0 + \varphi) + \frac{\omega b\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(0) \end{cases}$ ce qui conduit à $\varphi = 0$ et $A = \frac{b\omega\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}$, ou $\varphi = \pi$ et $A = -\frac{b\omega\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}$. Dans les deux cas cela revient à écrire $X(t) = x(t) - l_v = \frac{b\omega\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin(\omega_0 t) + \frac{b\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t)$.

- 9** Un point matériel M de masse m en mouvement sur l'axe Ox horizontal est soumis à l'action d'un ressort de raideur k accroché en O ainsi qu'à une force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$. Écrire l'équation du mouvement, la mettre sous forme canonique et en déduire suivant la valeur de $Q_0 = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$ la condition pour qu'il y ait des oscillations amorties.

☐ a. $Q_0 < \frac{1}{2}$ ☒ b. $Q_0 > \frac{1}{2}$ ☐ c. $Q_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ☐ d. $Q_0 > \frac{1}{\sqrt{2}}$

En projection sur l'axe Ox l'équation du mouvement est : $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\alpha \frac{dx}{dt} - k(x - l_v)$.

Si on pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ alors $\alpha = \frac{\sqrt{km}}{Q_0} = m \frac{\omega_0}{Q_0}$ donc $\frac{\alpha}{m} = \frac{\omega_0}{Q_0}$.

On retrouve en posant $X = x - l_v$ et en divisant l'expression par m la même équation canonique que pour le circuit RLC en régime transitoire : $\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q_0} \frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = 0$. On remarque au passage l'analogie entre un système électrique et un système mécanique. Dans le premier cas, les pertes énergétiques sont dues à la résistance, dans le deuxième cas elles sont dues aux frottements.

Les solutions de l'équation caractéristique $\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q_0} \frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = 0$ sont de type oscillatoire amorti si l'équation caractéristique $r^2 + \frac{\omega_0}{Q_0} r + \omega_0^2 = 0$ a des racines complexes, donc si le discriminant est négatif.

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q_0}\right)^2 - 4\omega_0^2 < 0 \quad \text{si} \quad Q_0 > \frac{1}{2}.$$

- 10** Un point matériel M de masse m en mouvement sur l'axe Ox horizontal est soumis à l'action d'un ressort de raideur k accroché en O ainsi qu'à une force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ avec $\alpha = \sqrt{km}$. Sachant qu'à $t = 0$ l'allongement du ressort est nul et que le

point matériel est lancé avec une vitesse initiale v_0 , déterminer l'allongement du ressort en fonction du temps.

☒ a. $X(t) = \frac{2v_0}{\sqrt{3}\omega_0} e^{-\frac{\omega_0 t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\omega_0 t}{2}\right)$ ☐ b. $X(t) = \frac{v_0}{\omega_0} e^{-\frac{\omega_0 t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\omega_0 t}{2}\right)$

☐ c. $X(t) = \frac{v_0}{\sqrt{3}\omega_0} e^{-\frac{\omega_0 t}{2}} \operatorname{sh}(\sqrt{3}\omega_0 t)$ ☐ d. $X(t) = \frac{2v_0}{\sqrt{3}\omega_0} e^{-\frac{\omega_0 t}{2}} \operatorname{sh}(\sqrt{3}\omega_0 t)$

En reprenant les mêmes notations qu'à la question 9, $Q_0 = 1$, $\Delta = -3\omega_0^2$ et donc l'équation caractéristique admet deux racines complexes $r_1 = \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2}\omega_0$ et $r_2 = \frac{-1 - j\sqrt{3}}{2}\omega_0$.

La solution de l'équation différentielle est de la forme $X(t) = Ae^{-\frac{\omega_0 t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\omega_0 t}{2} + \varphi\right)$.

Les conditions initiales imposent que $X_{t=0} = 0 = A \sin \varphi$,

et $\left(\frac{dX}{dt}\right)_{t=0} = v_0 = \frac{A\omega_0 \sqrt{3}}{2} \cos \varphi - \frac{A\omega_0}{2} \sin \varphi$ donc $\varphi = 0$ et $v_0 = \frac{A\sqrt{3}\omega_0}{2}$ soit $A = \frac{2v_0}{\sqrt{3}\omega_0}$.

L'allongement du ressort est donc $X(t) = \frac{2v_0}{\sqrt{3}\omega_0} e^{-\frac{\omega_0 t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\omega_0 t}{2}\right)$.

- 11** Un point matériel M de masse m en mouvement sur l'axe Ox horizontal est soumis à l'action d'un ressort de raideur k accroché en O ainsi qu'à une force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ avec $\alpha = 4\sqrt{km}$. Sachant qu'à $t = 0$, l'allongement du ressort est nulle et que le point matériel est lancé avec une vitesse initiale v_0 , déterminer l'allongement du ressort en fonction du temps.

☐ a. $X(t) = \frac{2v_0}{\sqrt{3}\omega_0} e^{-2\omega_0 t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\omega_0 t}{2}\right)$ ☐ b. $X(t) = \frac{v_0}{\omega_0} e^{-2\omega_0 t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\omega_0 t}{2}\right)$

☒ c. $X(t) = \frac{v_0}{\sqrt{3}\omega_0} e^{-2\omega_0 t} \operatorname{sh}(\sqrt{3}\omega_0 t)$ ☐ d. $X(t) = \frac{2v_0}{\sqrt{3}\omega_0} e^{-2\omega_0 t} \operatorname{sh}(\sqrt{3}\omega_0 t)$

En reprenant les mêmes notations qu'à la question 10, $Q_0 = \frac{1}{4}$, $\Delta = 12\omega_0^2$ et donc l'équation caractéristique admet deux racines réelles $r_1 = (-2 + \sqrt{3})\omega_0$ et $r_2 = (-2 - \sqrt{3})\omega_0$.

La solution de l'équation différentielle est de la forme $X(t) = e^{-2\omega_0 t} (Ae^{\sqrt{3}\omega_0 t} + Be^{-\sqrt{3}\omega_0 t})$.

Les conditions initiales imposent que $X_{t=0} = 0 = A + B$,

et $\left(\frac{dX}{dt}\right)_{t=0} = v_0 = -2\omega_0(A + B) + \sqrt{3}\omega_0(A - B)$ donc $v_0 = 2A\sqrt{3}\omega_0$ et $A = \frac{v_0}{2\sqrt{3}\omega_0}$.

L'allongement du ressort est donc $X(t) = \frac{v_0}{\sqrt{3}\omega_0} e^{-2\omega_0 t} \operatorname{sh}(\sqrt{3}\omega_0 t)$.

- 12** Un point matériel M de masse m en mouvement sur l'axe Ox horizontal est soumis à l'action d'un ressort accroché en O ainsi qu'à une force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ et à une force $\vec{F} = F_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$. On pose $X = x - l_v$ et $\underline{X}(t) = X_0 \exp(j(\omega t + \varphi))$

et $\underline{X}_0 = X_0 \exp(j\varphi)$. Écrire l'équation du mouvement et en déduire la relation vérifiée par $\underline{X}_0$.

☐ a. $\underline{X}_0(k + \omega^2 m + \alpha j\omega) = F_0$ ☒ b. $\underline{X}_0(k - \omega^2 m + \alpha j\omega) = F_0$

☐ c. $\underline{X}_0(k + \omega^2 m + \alpha\omega) = F_0$ ☐ d. $\underline{X}_0(k - \omega^2 m + \alpha\omega) = F_0$

Le principe fondamental de la dynamique projeté sur l'axe Ox donne l'équation :

$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\alpha \frac{dx}{dt} - k(x - l_v) + F_0 \cos(\omega t)$ donc $m \frac{d^2 \underline{X}}{dt^2} + \alpha \frac{d\underline{X}}{dt} + k\underline{X} = F_0 \cos(\omega t)$. $\underline{X}(t)$ est solution de $m \frac{d^2 \underline{X}}{dt^2} + \alpha \frac{d\underline{X}}{dt} + k\underline{X} = F_0 \exp(j\omega t)$. La dérivation par rapport au temps revient à une multiplication par $j\omega$ donc $-\omega^2 m \underline{X} + \alpha j\omega \underline{X} + k\underline{X} = F_0 \exp(j\omega t)$. Après factorisation et simplification par $\exp(j\omega t)$ on arrive à $\underline{X}_0(-\omega^2 m + \alpha j\omega + k) = F_0$.

- 13** Déterminer la condition de résonance d'élongation pour l'oscillateur décrit à la question 12.

☐ a. $\alpha < \sqrt{\frac{mk}{2}}$ ☐ b. $\alpha > \sqrt{\frac{mk}{2}}$

☒ c. $\alpha < \sqrt{2mk}$ ☐ d. $\alpha > \sqrt{2mk}$

L'élongation du ressort a pour amplitude le module de l'amplitude complexe :

$$|\underline{X}_0| = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\alpha\omega)^2}}. \text{ Il y a résonance si cette amplitude passe par un maximum}$$

pour une pulsation ω_r . Il faut pour répondre à la question étudier le dénominateur de $|\underline{X}_0|$ et plus précisément $f(\omega) = (k - m\omega^2)^2 + (\alpha\omega)^2$. En dérivant par rapport à ω on obtient $f'(\omega) = 2(k - m\omega^2)(-2m\omega) + 2\alpha^2\omega$.

$f'(\omega)$ s'annule pour $\omega = 0$ et $\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{2m^2}}$. La deuxième solution n'existe que si $\alpha < \sqrt{2mk}$ et l'étude des variations de $f(\omega)$ montre alors que l'extremum est un maximum, comme pour l'étude de la tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit RLC série soumis à une tension sinusoïdale de fréquence variable.

- 14** Déterminer la pulsation de résonance de vitesse ω_1 pour cet oscillateur.

☐ a. $\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ ☒ b. $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

☐ c. $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}}$ ☐ d. $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{2m^2}}$

La question 12 a permis de montrer que $\underline{X}(t)$ est solution de l'équation :

$$-\omega^2 m \underline{X} + \alpha j\omega \underline{X} + k\underline{X} = F_0 \exp(j\omega t) \text{ donc } \underline{X}(t) = \frac{F_0 \exp(j\omega t)}{k - \omega^2 m + \alpha j\omega} \text{ et comme la vitesse est}$$

la dérivée de la position, la vitesse complexe a pour expression

$$\underline{V}(t) = j\omega \underline{X}(t) = \frac{j\omega F_0 \exp(j\omega t)}{k - \omega^2 m + \alpha j\omega} = \frac{F_0 \exp(j\omega t)}{\frac{k - \omega^2 m}{j\omega} + \alpha}.$$

On en tire $|\underline{V}| = \frac{F_0}{\sqrt{\left(\frac{k - \omega^2 m}{\omega}\right)^2 + \alpha^2}}$, qui passe par un maximum pour $\frac{k - \omega^2 m}{\omega} = 0$

(le dénominateur est alors minimal) et donc $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Cette pulsation est indépendante des frottements, de même que la pulsation de résonance d'intensité dans un circuit RLC série ne dépend pas de la résistance.

On a ainsi analogie entre le comportement d'un oscillateur électrique et un oscillateur mécanique.

15 Théorème du moment cinétique

VRAI/FAUX

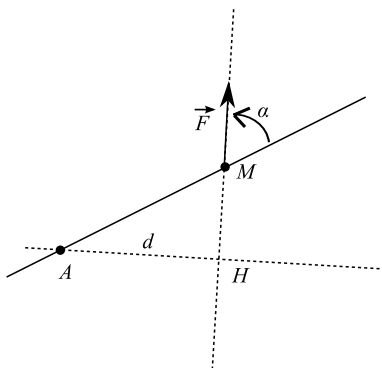
1 Moment d'une force

☒ V ☐ F a. Le moment par rapport à un point A d'une force $\vec{F}$ appliquée à un point matériel M est défini par $\vec{M}_A = \vec{AM} \wedge \vec{F}$.

Il s'agit de l'application directe de la notion de moment d'un vecteur par rapport à un point.

☐ V ☒ F b. Le moment par rapport à un point A d'une force $\vec{F}$ ne dépend que de la norme de la force et de la distance AM.

Le moment dépend aussi de la distance entre le point A et la droite d'action de la force (« bras de levier »).



Le vecteur $\vec{M}_A$ a pour norme $\|\vec{AM}\| \cdot \|\vec{F}\| \cdot |\sin \alpha|$ en notant α l'angle $(\vec{AM}, \vec{F})$. Or $\|\vec{AM}\| \cdot |\sin \alpha| = AH = d$ qui est le bras de levier de la force.

☒ V ☐ F c. Le moment par rapport à un point A d'une force $\vec{F}$ appliquée à un point matériel M donne une indication sur le sens de la rotation autour de A induite par la force $\vec{F}$.

Le sens du vecteur $\vec{M}_A = \vec{AM} \wedge \vec{F}$ donne, en suivant la règle « du tire-bouchon » ou « des doigts de la main droite », le sens dans lequel la force $\vec{F}$ tend à faire tourner M autour de A . Sur le schéma précédent, le produit vectoriel serait dirigé vers nous (pouce de la main droite), ce qui correspond à une rotation dans le sens trigonométrique direct (autres doigts de la main droite).

2 Moment cinétique

☐ V ☒ F a. Le moment cinétique d'un point matériel M de masse m par rapport à un point A est défini par $\vec{L}_A = m\vec{v} \wedge \vec{AM}$.

Par définition, le moment cinétique est le moment de la quantité de mouvement :

$$\vec{L}_A = \vec{AM} \wedge \vec{p} = \vec{AM} \wedge m\vec{v}.$$



Quand on permute l'ordre des deux vecteurs d'un produit vectoriel, ce produit change de sens (contrairement au produit scalaire).

☒ V ☐ F b. Le moment cinétique d'un point matériel M de masse m par rapport à un axe Δ de vecteur unitaire $\vec{u}$ et passant par le point A est défini par $L_\Delta = \vec{L}_A \cdot \vec{u}$.

Le moment cinétique par rapport à l'axe Δ est la projection orthogonale du moment cinétique vectoriel sur Δ .

☒ V ☐ F c. Le moment cinétique d'un point matériel M de masse m par rapport à un axe Δ de vecteur unitaire $\vec{u}$ ne dépend pas du point de l'axe choisi pour effectuer le calcul.

$$\text{Soient } A \text{ et } A' \text{ deux points de } \Delta : \vec{L}_A = \vec{AM} \wedge m\vec{v} = (\vec{AA'} + \vec{A'M}) \wedge m\vec{v} = \vec{AA'} \wedge m\vec{v} + \vec{L}_{A'}.$$

Or le produit vectoriel $\vec{AA'} \wedge m\vec{v}$ est perpendiculaire à $\vec{AA'}$ donc à Δ et par conséquent $(\vec{AA'} \wedge m\vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$. Il reste donc $\vec{L}_A \cdot \vec{u} = \vec{L}_{A'} \cdot \vec{u}$.

3 Théorème du moment cinétique

☐ V ☒ F a. D'après le théorème du moment cinétique dans un référentiel galiléen, la dérivée du moment cinétique par rapport à un point A quelconque est égal à la somme des moments des forces par rapport à A .

Le point A doit être fixe dans le référentiel d'étude.

☒ V ☐ F b. Si les droites d'action de toutes les forces appliquées à un point matériel M passent par le point A fixe du référentiel d'étude galiléen, il y a conservation du moment cinétique de M par rapport au point A .

Cette propriété résulte directement de l'application du théorème du moment cinétique : les moments de toutes les forces sont alors nuls et $\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{0}$.

QCM

4 Déterminer en coordonnées cylindriques la composante L_z du moment cinétique d'un point matériel M de masse m par rapport à l'origine O du repère.

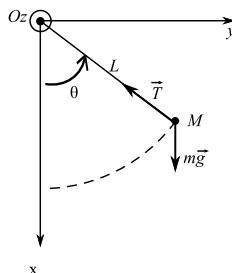
- ☐ a. $L_z = m\rho \frac{d\theta}{dt}$ ☒ b. $L_z = m\rho^2 \frac{d\theta}{dt}$
☐ c. $L_z = m\rho \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ ☐ d. $L_z = m \left(\rho \frac{d\theta}{dt}\right)^2$

En coordonnées cylindriques, $\vec{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z$ et $\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z$ d'où, puisque

$$\vec{u}_z = \vec{u}_\rho \wedge \vec{u}_\theta, \quad (\vec{OM} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u}_z = \rho^2 \frac{d\theta}{dt}$$

et donc $L_z = m(\vec{OM} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u}_z = m\rho^2 \frac{d\theta}{dt}$.

5 Un point matériel M de masse m est fixé au bout d'un fil inextensible de masse négligeable et de longueur l . L'autre extrémité du fil est accrochée à un point O fixe. Déterminer le moment $\vec{M}_O$ par rapport à O de la tension $\vec{T}$ du fil et le moment $\vec{M}'_O$ du poids $m\vec{g}$. On fera intervenir l'angle θ entre le fil supposé tendu et la verticale Ox descendante.



- ☒ a. $\vec{M}_O = \vec{0}$ ☐ b. $\vec{M}_O = \|\vec{T}\| l \cos \theta \vec{u}_z$
☐ c. $\vec{M}'_O = mgl \sin \theta \vec{u}_z$ ☒ d. $\vec{M}'_O = -mgl \sin \theta \vec{u}_z$

La droite d'action de la tension $\vec{T}$ passant par le point O , son moment par rapport à O est nul.

Le moment du poids $\vec{M}_O'$ se calcule par $\vec{M}_O' = \vec{OM} \wedge (m\vec{g}) = m\vec{OM} \wedge g\vec{u}_x$ donc $\vec{M}_O' = mlg\vec{u}_\rho \wedge (\cos\theta\vec{u}_\rho - \sin\theta\vec{u}_\theta) = -mlg \sin\theta\vec{u}_z$

- 6** Dédurre des deux questions précédentes l'équation différentielle du mouvement de M dans le cas d'un mouvement circulaire de rayon l .

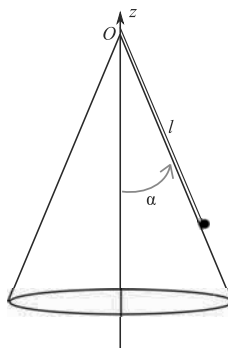
☐ a. $l \frac{d^2\theta}{dt^2} - g \sin\theta = 0$ ☐ b. $l \frac{d^2\theta}{dt^2} - g \cos\theta = 0$

☒ c. $l \frac{d^2\theta}{dt^2} + g \sin\theta = 0$ ☐ d. $l \frac{d^2\theta}{dt^2} + g \cos\theta = 0$

En appliquant le théorème du moment cinétique dans le référentiel supposé galiléen,

$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O + \vec{M}_O'$ d'où en projection sur l'axe Oz horizontal : $\frac{d}{dt} \left(m\rho^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = -mlg \sin\theta$ avec $\rho = l$. L'équation différentielle du mouvement est donc après simplification : $l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin\theta$.

- 7** Un point matériel M de masse m est accroché à un fil inextensible de masse négligeable et de longueur l . L'autre extrémité du fil est accrochée à un point O fixe. M se déplace sans frottement sur un cône d'axe vertical Oz , de sommet O , de demi-angle au sommet α .



On suppose que le fil reste tendu au cours du mouvement et que le point matériel reste en contact avec le cône. Soit ω la vitesse angulaire de rotation de M autour de l'axe Oz . Déterminer le moment cinétique de M par rapport à Oz .

☐ a. $L_z = ml^2\omega \sin\alpha$ ☐ b. $L_z = ml^2\omega \sin 2\alpha$
☒ c. $L_z = m(l \sin\alpha)^2 \omega$ ☐ d. $L_z = m(l \cos\alpha)^2 \omega$

Le fil restant tendu, la trajectoire de M est un cercle de centre A et de rayon $\rho = l \sin \alpha$ dans un plan Axy perpendiculaire à l'axe Oz . En utilisant le résultat de la question 4 en coordonnées cylindriques, $L_z = m\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = m(l \sin \alpha)^2 \omega$.

8 Dans la configuration de la question 7, déterminer le moment M_z de la réaction du support et le moment M'_z du poids par rapport à l'axe Oz .

☒ a. $M_z = 0$ ☐ b. $M_z = \|\vec{R}\| l \tan \alpha$

☒ c. $M'_z = 0$ ☐ d. $M'_z = mgl \sin \alpha$

La réaction étant perpendiculaire au cône en l'absence de frottement, le produit vectoriel $\vec{M}_O = \vec{OM} \wedge \vec{R}$, perpendiculaire aux deux vecteurs, est dirigé suivant le vecteur $\vec{u}_\theta$ des coordonnées cylindriques. Sa projection sur l'axe Oz est donc nulle.

Le moment du poids $\vec{M}'_O = m\vec{OM} \wedge \vec{g}$ lui est perpendiculaire, il n'a donc pas de composante sur Oz .

Finalement $M_z = M'_z = 0$.

9 Dédurre des deux questions précédentes les caractéristiques du mouvement du point matériel M .

☒ a. mouvement uniforme ☐ b. mouvement oscillatoire

☒ c. mouvement circulaire ☐ d. mouvement parabolique

Les trois forces s'exerçant sur M (poids, réaction du support, tension du fil) ont toutes un moment par rapport à Oz nul. L'application du théorème du moment cinétique par rapport à l'axe fixe Oz conduit donc à l'équation $\frac{dL_z}{dt} = 0$ soit $L_z = m(l \sin \alpha)^2 \omega$ égal à une constante. Comme m , l et α sont des constantes, il en est de même pour ω .

10 Soit un point matériel M de masse m soumis à un ensemble de forces dont la résultante $\vec{F}$ passe par le point fixe O . On suppose qu'à l'instant initial, la vitesse $\vec{v}_0$ de M est perpendiculaire à la direction du vecteur $\vec{OM}_0$, et on appelle xOy le plan contenant ces deux vecteurs. Ultérieurement, on note $r = OM$, θ l'angle polaire des coordonnées cylindriques et v la norme de la vitesse.

☒ a. la trajectoire est plane ☐ b. la trajectoire est circulaire

☐ c. $v = \frac{\|\vec{OM}_0\| v_0}{r}$

☒ d. $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\|\vec{OM}_0\| v_0}{r^2}$

D'après le théorème du moment cinétique par rapport à O en présence d'une résultante des forces parallèle à $\vec{OM}$: $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$. Le moment cinétique se conserve donc et reste égal à sa valeur initiale, soit $\vec{L}_O = mOM_0 v_0 \vec{u}_z$.

Quel que soit l'instant considéré, $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge \vec{v} = mOM_0v_0\vec{u}_z$ donc le vecteur $\vec{u}_z$ est toujours perpendiculaire à $\vec{OM}$, ce qui implique que M se déplace dans le plan xOy .

En utilisant la conservation de $L_z = m\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$ pour le mouvement dans le plan xOy on obtient la relation $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\|\vec{OM}_0\| v_0}{r^2}$.

11 Déterminer l'énergie cinétique E_C du point matériel décrit à la question 10.

☐ a. $E_C = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$
☒ b. $E_C = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + v_0^2 \frac{(OM_0)^2}{r^2}\right]$
☐ c. $E_C = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + v_0^2 \frac{r^2}{(OM_0)^2}\right]$
☐ d. $E_C = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - v_0^2\right] + \|\vec{F}\| r$

En coordonnées cylindriques et pour un mouvement dans le plan xOy , les coordonnées de la vitesse sont $v_\rho = \frac{d\rho}{dt} = \frac{dr}{dt}$ et $v_\theta = \rho \frac{d\theta}{dt} = r \frac{d\theta}{dt}$. L'énergie cinétique est par conséquent égale à $E_C = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$. En remplaçant $\frac{d\theta}{dt}$ par son expression en fonction des conditions initiales : $E_C = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + v_0^2 \frac{(OM_0)^2}{r^2}\right]$.

12 Le point matériel décrit à la question 10 est soumis à une résultante des forces de la forme $\vec{F} = \alpha \frac{\vec{OM}}{r^3}$. Déterminer l'énergie potentielle E_P de M en la prenant nulle à l'infini par convention.

☐ a. $E_P = -\frac{\alpha}{2r^2}$
☐ b. $E_P = \frac{\alpha}{2r^2}$
☐ c. $E_P = -\frac{\alpha}{r}$
☒ d. $E_P = \frac{\alpha}{r}$

La force centrale $\vec{F}$ et l'énergie potentielle sont liées par la relation $dE_P = -\delta W_{\vec{F}}$ donc $dE_P = -\frac{\alpha r}{r^3} dr = -\frac{\alpha}{r^2} dr$ et par intégration $E_P = \frac{\alpha}{r}$.

13 Dédurre des questions 11 et 12 l'énergie potentielle effective E_{Peff} du point M . On posera $OM_0 = r_0$.

☒ a. $E_{Peff}(r) = mv_0^2 \frac{r_0^2}{2r^2} + \frac{\alpha}{r}$
☐ b. $E_{Peff}(r) = mv_0^2 \frac{r_0^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r}$
☐ c. $E_{Peff}(r) = mv_0^2 \frac{r^2}{2r_0^2} + \frac{\alpha}{r}$
☐ d. $E_{Peff}(r) = mv_0^2 \frac{r^2}{2r_0^2} - \frac{\alpha}{r}$

L'énergie mécanique est égale à $E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + v_0^2 \frac{(OM_0)^2}{r^2} \right] + \frac{\alpha}{r}$. Elle se met sous la forme $E_M = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + E_{Pe\text{ff}}(r)$ ce qui permet de se ramener à un problème à un degré de liberté. On pose donc $E_{Pe\text{ff}}(r) = mv_0^2 \frac{r_0^2}{2r^2} + \frac{\alpha}{r}$.

14 Dans le cas où $\vec{F} = \alpha \frac{\vec{OM}}{r^3}$ avec $\alpha < 0$:

- ☒ **a.** La force est attractive. ☐ **b.** La force est répulsive.
☐ **c.** $E_{Pe\text{ff}}(r)$ présente un maximum. ☒ **d.** $E_{Pe\text{ff}}(r)$ présente un minimum.

Dans le cas où α est négatif, il s'agit d'une interaction attractive puisque le vecteur $\vec{F}$ est tourné vers le point O . Pour étudier les variations de $E_{Pe\text{ff}}(r)$, dérivons l'expression $E_{Pe\text{ff}}(r) = mv_0^2 \frac{r_0^2}{2r^2} + \frac{\alpha}{r}$ par rapport à r : $E'_{Pe\text{ff}}(r) = -mv_0^2 \frac{r_0^2}{r^3} - \frac{\alpha}{r^2} = \frac{|\alpha|}{r^2} - mv_0^2 \frac{r_0^2}{r^3}$. La dérivée s'annule et change de signe pour $r_1 = mv_0^2 \frac{r_0^2}{|\alpha|}$. $E'_{Pe\text{ff}}(r) < 0$ si $r < r_1$ et $E'_{Pe\text{ff}}(r) > 0$ si $r > r_1$ donc il s'agit d'un minimum : il a un puits de potentiel. La valeur minimale de $E_{Pe\text{ff}}(r)$ vaut alors $E_{Pe\text{ff}}(r_1) = -\frac{\alpha^2}{2mv_0^2 r_0^2}$.

15 À l'instant $t = 0$, $v_0 = \sqrt{\frac{|\alpha|}{mr_0}}$. Déterminer l'énergie potentielle effective initiale, l'énergie mécanique E_M et la forme de la trajectoire de M .

- ☐ **a.** $E_M = 0$ ☒ **b.** $E_M = \frac{\alpha}{2r_0}$
☒ **c.** trajectoire circulaire ☐ **d.** trajectoire parabolique

L'énergie potentielle effective pour la position initiale est :

$$E_{Pe\text{ff}}(r) = mv_0^2 \frac{r_0^2}{2r^2} + \frac{\alpha}{r} = m \frac{|\alpha|}{2mr_0} + \frac{\alpha}{r_0} = \frac{\alpha}{2r_0}$$

L'énergie mécanique est, en sommant à $t = 0$, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle : $E_M = \frac{m}{2} \frac{|\alpha|}{mr_0} + \frac{\alpha}{r_0} = \frac{\alpha}{2r_0}$. On constate que $E_M = E_{Pe\text{ff}}(r_0)$. Comme de façon générale, $E_M \geq E_{Pe\text{ff}}(r_0)$, la seule possibilité est que $r = r_0$. La trajectoire étant plane, c'est donc un cercle de rayon r_0 . Le mouvement est de plus uniforme puisque le moment cinétique se conserve.

16 Mouvements dans un champ newtonien

- 1** Déterminer l'expression de l'énergie potentielle d'un point matériel de masse m soumis à l'attraction d'une planète de masse M_P . On notera r la distance entre le centre de la planète et le point matériel.

☒ a. $E_P = -\frac{GmM_P}{r}$ ☐ b. $E_P = \frac{GmM_P}{r}$

☐ c. $E_P = -\frac{GmM_P}{r^2}$ ☐ d. $E_P = \frac{GmM_P}{r^2}$

La force de gravitation entre deux particules matérielles est de la forme : $\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\vec{u}$, m_1 et m_2 étant les masses des particules. L'énergie potentielle dont dérive $\vec{F}$ se calcule en intégrant l'expression $dE_P = -\left(-\frac{Gm_1m_2}{r^2}\right)dr$.

En prenant par convention l'énergie potentielle nulle à l'infini, $E_P = -\frac{Gm_1m_2}{r}$.

Dans le cas d'un point matériel de masse m soumis à l'attraction d'une planète de masse M_P et en faisant l'hypothèse d'une répartition sphérique des masses, l'expression pour deux masses ponctuelles est valable (voir le théorème de Gauss en électrostatique) et donc $E_P = -\frac{GM_Pm}{r}$.

- 2** Un satellite est en mouvement circulaire autour de la Terre. Le rayon de son orbite étant égal à R , déterminer sa vitesse v dans le référentiel géocentrique.

☒ a. $v = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R}}$ ☐ b. $v = R_T \sqrt{\frac{g_0}{2R}}$

☐ c. $v = R \sqrt{\frac{g_0}{R_T}}$ ☐ d. $v = R \sqrt{\frac{2g_0}{R_T}}$

Soit G la constante de gravitation universelle et M_T la masse de la Terre.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique en projection sur $\vec{u}_\rho$ en coordonnées cylindriques : $-mR\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{GM_Tm}{R^2}$ dans le cas d'une trajectoire circulaire. La vitesse radiale v_ρ étant égale à $R\frac{d\theta}{dt}$, la norme de la vitesse vérifie la relation $v^2 = \frac{GM_T}{R}$. Enfin, en assimilant le champ de gravitation à la surface de la Terre d'une part, et la pesanteur d'autre part, l'expression de g_0 est $g_0 = \frac{M_T G}{R_T^2}$ donc $v = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R}}$.

- 3** Déterminer l'énergie E_M d'un satellite de masse m sur une orbite circulaire de rayon R autour de la Terre.

☒ a. $E_M = -m\frac{g_0R_T^2}{2R}$ ☐ b. $E_M = -m\frac{g_0R_T^2}{R}$

☐ c. $E_M = -m\frac{2g_0R_T^2}{R}$ ☐ d. $E_M = -m\frac{g_0R_T^2}{\sqrt{2}R}$

On somme l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR_T^2 \frac{g_0}{R}$ et l'énergie potentielle $E_p = -\frac{mM_T G}{R} = -m \frac{g_0 R_T^2}{R} = -2E_c$. Le résultat est donc $E_M = -m \frac{g_0 R_T^2}{2R}$.

4 Quelle est la relation entre la période de révolution T d'un satellite sur une orbite circulaire autour de la Terre et le rayon R de cette orbite ?

- ☐ a. $T^2 = 2 \left(\frac{\pi}{R} \right)^2 \frac{R_T^3}{g_0}$ ☐ b. $T^2 = \left(\frac{2\pi}{R} \right)^2 \frac{R_T^3}{g_0}$
☐ c. $T^2 = 2 \left(\frac{\pi}{R_T} \right)^2 \frac{R^3}{g_0}$ ☒ d. $T^2 = \left(\frac{2\pi}{R_T} \right)^2 \frac{R^3}{g_0}$

On réutilise la relation $-mR \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{GM_T m}{R^2}$ trouvée à la question 2. La vitesse angulaire est constante et égale à $\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{GM_T}{R^3}}$ donc $\frac{2\pi}{T} = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R^3}}$ et finalement $T^2 = \left(\frac{2\pi}{R_T} \right)^2 \frac{R^3}{g_0}$. On trouve que le carré de la période est proportionnel au cube du rayon de la trajectoire, ce qui constitue la 3^e loi de Kepler pour une trajectoire circulaire.

5 Déterminer la période de révolution T et l'altitude h par rapport au niveau de la mer d'un satellite géostationnaire.

- ☐ a. $T = 24h$ ☒ b. $T = T_0 = 23 \text{ h } 56 \text{ min}$
☒ c. $h = 35,8 \cdot 10^6 \text{ m}$ ☐ d. $h = 42,1 \cdot 10^6 \text{ m}$

Par définition un satellite géostationnaire est fixe dans le référentiel terrestre, sa vitesse angulaire de rotation dans le référentiel géocentrique est donc la même que celle de la Terre, et sa période est égale à $T_0 = 23 \text{ h } 56 \text{ min}$ (durée du jour sidéral). On note que $T_0 < 24h$: la raison est qu'il s'agit de la période de révolution par rapport aux étoiles « fixes » et non par rapport au Soleil. Quand la Terre a tourné de 360° par rapport aux étoiles lointaines, elle s'est déplacée sur son orbite autour du Soleil, et il lui faut encore tourner d'environ 1° pour se retrouver orientée de la même façon par rapport au Soleil.

En appliquant la relation trouvée à la question précédente, $T^2 = \left(\frac{2\pi}{R_T} \right)^2 \frac{(R_T + h)^3}{g_0}$.

On en tire l'altitude $h = \sqrt[3]{g_0 \left(\frac{TR_T}{2\pi} \right)^2} - R_T = 35,8 \cdot 10^6 \text{ m}$.

6 D'où vaut-il mieux lancer un satellite artificiel ?

- ☐ a. d'un des pôles ☐ b. d'un des tropiques
☒ c. de l'équateur ☐ d. Cela n'a pas d'importance.

Lancer un satellite en partant d'un point le plus proche possible de l'équateur permet de « bénéficier » de la vitesse d'entraînement due à la rotation de la Terre. Cette vitesse est maximale à l'équateur, puisque c'est là que le point matériel est le plus éloigné de l'axe de rotation. L'ordre de grandeur de la vitesse d'entraînement est alors de $6,4 \cdot 10^6 \times 7,3 \cdot 10^{-5} = 467 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

7 Quelle est, dans le référentiel géocentrique, la vitesse v_l de libération d'un satellite ?

- ☐ a. $v_l = 178 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ☐ b. $v_l = 356 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
☐ c. $v_l = 7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ ☒ d. $v_l = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

La vitesse de libération est la vitesse minimale permettant à un satellite d'échapper à l'attraction terrestre (ce n'est *a priori* pas ce qu'on recherche, c'est donc la aussi la vitesse maximale permettant de ne pas le perdre !).

Ce cas limite correspond à une trajectoire parabolique, pour laquelle l'énergie est nulle. L'équation vérifiée par la vitesse de libération v_l dans le référentiel géocentrique est par

$$\text{conséquent } E_M = 0 = \frac{1}{2}mv_l^2 - \frac{GmM_T}{R_T} = \frac{1}{2}mv_l^2 - \frac{mR_T^2g_0}{R_T}.$$

On en tire la valeur $v_l = \sqrt{2R_Tg_0} = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

8 Un satellite est sur une trajectoire circulaire autour de la Terre. Que se passe-t-il si on double sa vitesse sans changer sa direction au moment du passage en un point M_0 ?

- ☐ a. La trajectoire devient elliptique, de périégée M_0 .
☐ b. La trajectoire devient elliptique, d'apogée M_0 .
☐ c. La trajectoire devient parabolique, de sommet M_0 .
☒ d. La trajectoire devient hyperbolique, de sommet M_0 .

Le signe de l'énergie permet de déterminer simplement le type de trajectoire.

D'après la question 2, sur la trajectoire circulaire, la vitesse est égale à $v_c = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R}}$.

Sur la nouvelle trajectoire, $v' = 2v_c = 2R_T \sqrt{\frac{g_0}{R}}$ donc l'énergie a pour valeur

$$E_M = \frac{1}{2}m \frac{4R_T^2g_0}{R} - m \frac{g_0R_T^2}{R} = m \frac{g_0R_T^2}{R}. \text{ L'énergie mécanique étant strictement positive, la trajectoire est hyperbolique.}$$

La direction de la vitesse ne change pas au moment où sa norme est multipliée par deux, elle reste donc orthoradiale, si bien que M_0 est forcément le sommet de l'hyperbole (seul point de la conique où cette propriété géométrique est vérifiée).

- 9** Déterminer le rapport des masses M_T de la Terre et M_S du Soleil, sachant que la période de révolution de la Terre autour du Soleil est $T_1 = 365,25$ jours et que celle de la Lune autour de la Terre est $T_2 = 27,32$ jours. On considérera des trajectoires de rayon moyen $R_1 = 149,6 \cdot 10^6$ km pour la Terre autour du Soleil et de rayon moyen $R_2 = 384,4 \cdot 10^3$ km pour la Lune autour de la Terre.

☐ a. $\frac{M_S}{M_T} = 1,1 \cdot 10^5$ ☐ b. $\frac{M_S}{M_T} = 2,2 \cdot 10^5$
☒ c. $\frac{M_S}{M_T} = 3,3 \cdot 10^5$ ☐ d. $\frac{M_S}{M_T} = 4,4 \cdot 10^5$

On retrouve la troisième loi de Kepler pour le système Terre/Soleil et pour le système Lune/Terre en appliquant le principe fondamental de la dynamique.

$$\text{Terre/Soleil : } M_T R_1 \left(\frac{4\pi^2}{T_1^2} \right) = \frac{G M_T M_S}{R_1^2}$$

$$\text{Lune/Terre : } M_L R_2 \left(\frac{4\pi^2}{T_2^2} \right) = \frac{G M_L M_T}{R_2^2}$$

En combinant les deux égalités on obtient $\left(\frac{R_1^3}{T_1^2} \right) \left(\frac{T_2^2}{R_2^3} \right) = \frac{M_S}{M_T} = 3,3 \cdot 10^5$

- 10** L'orbite terrestre autour du Soleil est une ellipse d'excentricité $e = 0,0167$. Déterminer le rapport des vitesses de la Terre v_P au périhélie (point de l'orbite le plus proche du Soleil) et v_A à l'aphélie (point le plus éloigné du Soleil) dans le référentiel héliocentrique.

☐ a. $\frac{v_P}{v_A} = 1,068$ ☒ b. $\frac{v_P}{v_A} = 1,034$
☐ c. $\frac{v_P}{v_A} = 1,017$ ☐ d. $\frac{v_P}{v_A} = 0,967$

Le mouvement se fait suivant la loi des aires, et de plus la vitesse étant orthoradiale en ces deux points particuliers, on peut écrire que la constante des aires c s'écrit $c = \rho_P v_P = \rho_A v_A$ donc $\frac{v_P}{v_A} = \frac{\rho_A}{\rho_P}$. Comme l'équation de l'ellipse est $\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$,

$$\frac{v_P}{v_A} = \frac{\rho_A}{\rho_P} = \frac{1+e}{1-e} = 1,034 \text{ soit un écart relatif de l'ordre de } 3 \%$$

- 11** Un satellite artificiel de masse m est lancé depuis un point M_0 tel que $OM_0 = r_0$; sa vitesse dans le référentiel géocentrique est orthoradiale et de norme v_0 égale à la moitié de celle qui lui donnerait une trajectoire circulaire à partir de la même position initiale. Déterminer l'énergie mécanique et le moment cinétique du satellite dans le référentiel géocentrique.

☐ a. $E_M = -\frac{3}{8} m R_T^2 \frac{g_0}{r_0}$ ☒ b. $E_M = -\frac{7}{8} m R_T^2 \frac{g_0}{r_0}$
☐ c. $L_0 = m R_T \sqrt{r_0 g_0}$ ☒ d. $L_0 = \frac{m}{2} R_T \sqrt{r_0 g_0}$

La vitesse du mouvement circulaire a déjà été calculée : $v_c = R_T \sqrt{\frac{g_0}{r_0}}$ donc $v_0 = \frac{1}{2} R_T \sqrt{\frac{g_0}{r_0}}$.

L'énergie mécanique est égale à $E_M = \frac{m}{8} R_T^2 \frac{g_0}{r_0} - m R_T^2 \frac{g_0}{r_0} = -\frac{7}{8} m R_T^2 \frac{g_0}{r_0}$ et le moment cinétique vaut $L_0 = \frac{m}{2} R_T \sqrt{r_0 g_0}$.

12 Déterminer le paramètre p de la trajectoire du satellite décrit à la question 11.

☐ a. $p = r_0$ ☐ b. $p = \frac{r_0}{2}$

☒ c. $p = \frac{r_0}{4}$ ☐ d. $p = \frac{r_0}{8}$

L'énergie mécanique étant négative, la trajectoire est une ellipse. Pour déterminer le paramètre, utilisons le principe fondamental de la dynamique.

D'après la formule de Binet pour l'accélération, c étant la constante des aires, $-mc^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -m M_T G u^2 = -m g_0 R_T^2 u^2$ avec $c = \frac{\sigma}{m} = \frac{1}{2} R_T \sqrt{r_0 g_0}$.

Par ailleurs $u = \frac{1 + e \cos \theta}{p}$ et $\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\frac{e \cos \theta}{p}$ d'où $\frac{c^2}{p} = g_0 R_T^2$. Comme $c^2 = \frac{1}{4} R_T^2 r_0 g_0$ on obtient à partir des relations précédentes $p = \frac{r_0}{4}$.

13 En utilisant les caractéristiques de la vitesse au périégée et à l'apogée d'une trajectoire elliptique, établir la relation entre l'énergie et le demi grand axe pour un satellite de masse m en mouvement autour de la Terre.

☒ a. $a = -\frac{m g_0 R_T^2}{2E}$ ☐ b. $a = -\frac{m g_0 R_T^2}{\sqrt{2}E}$

☐ c. $a = -\frac{m g_0 R_T^2}{E}$ ☐ d. $a = -\frac{\sqrt{2} m g_0 R_T^2}{E}$

Au périégée et à l'apogée la vitesse est orthoradiale : on a donc en utilisant la loi des aires $v = \frac{c}{r}$. L'énergie a donc pour expression en ces deux points $E = \frac{1}{2} m \frac{c^2}{r^2} - m \frac{g_0 R_T^2}{r}$. On en déduit que r est solution d'une équation du second degré : $r^2 E + m r g_0 R_T^2 - \frac{1}{2} m c^2 = 0$. Les deux racines sont r_A et r_P dont la somme est égale au grand axe de l'ellipse : $r_A + r_P = 2a = -\frac{m g_0 R_T^2}{E}$ donc $a = -\frac{m g_0 R_T^2}{2E}$.

Cette formule classique est analogue à celle obtenue pour une trajectoire circulaire, à condition de remplacer le rayon du cercle par le demi grand axe de l'ellipse.

- 14** Soient deux particules chargées : la première fixe, de charge $Q > 0$, située à l'origine O du repère, la deuxième mobile, de charge $q > 0$. À l'instant initial, la charge mobile, située sur l'axe Ox à une distance D de la charge fixe, a une vitesse $\vec{V}_0$ parallèle à Ox et dirigée vers l'origine. Déterminer l'énergie E_M de la charge mobile et la nature de la trajectoire.

☐ a. $E_M = \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 D}$ ☒ b. $E_M = \frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 D}$

☒ c. trajectoire rectiligne ☐ d. trajectoire hyperbolique

La force de Coulomb entre les deux particules matérielles est : $\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$. L'énergie potentielle dont dérive $\vec{F}$ se calcule en intégrant l'expression $dE_P = -\left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right) dr$.

En prenant par convention l'énergie potentielle nulle à l'infini, $E_P = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}$.

L'énergie E_M de la charge mobile est égale à $E_M = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}$. Elle se conserve, donc grâce aux conditions initiales, $E_M = \frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 D}$.

Le moment cinétique de la particule se conserve et est nul à l'instant initial, donc il reste nul à tout instant. Le mouvement est par conséquent rectiligne le long de l'axe Ox .

- 15** Avec les hypothèses de la question précédente, déterminer la distance minimale d'approche d_m .

☒ a. $d_m = \frac{D}{1 + \frac{2\pi\epsilon_0 D}{qQ} mV_0^2}$ ☐ b. $d_m = \frac{D}{1 + \frac{4\pi\epsilon_0 D}{qQ} mV_0^2}$

☐ c. $d_m = \frac{D}{1 + \frac{\pi\epsilon_0 D}{qQ} mV_0^2}$ ☐ d. $d_m = \frac{D}{1 + \frac{\pi\epsilon_0 D}{2qQ} mV_0^2}$

La distance minimale d'approche correspond à la position où la particule mobile fait demi-tour sur l'axe Ox .

En utilisant la conservation de l'énergie mécanique entre l'instant initial et le moment où la vitesse s'annule : $E_M = \frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 D} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 d_m}$.

Il en résulte que $\frac{1}{d_m} = \frac{4\pi\epsilon_0}{2qQ} mV_0^2 + \frac{1}{D}$ donc $d_m = \frac{D}{1 + \frac{2\pi\epsilon_0 D}{qQ} mV_0^2}$.

17 Cinématique du changement de référentiel

VRAI/FAUX

1 Composition des vitesses et des accélérations

☐ V ☒ F a. Le point dit « coïncidant » P est un point fictif immobile dans le référentiel absolu et dont la position à un instant donné est la même que celle de M .

C'est dans le référentiel relatif que le point P est fixe. Il permet de décrire la composante du déplacement due au mouvement du référentiel relatif par rapport au référentiel absolu.

☐ V ☒ F b. Quand R_r est en translation, le point coïncidant P est forcément en mouvement rectiligne dans R_a .

Dire qu'un solide est en translation signifie qu'il ne change pas d'orientation par rapport au référentiel d'étude : tous les points liés au solide ont des trajectoires identiques, mais ces trajectoires peuvent être de formes très variées. Si ce sont des droites ou des portions de droites, il s'agit d'une translation rectiligne ; si ce sont des arcs de cercle, il s'agit d'une translation circulaire, etc. Par exemple, le référentiel géocentrique est en translation quasi circulaire par rapport au référentiel héliocentrique.

Dans tous les cas, les directions des axes liés au référentiel relatif sont invariables par rapport au référentiel absolu, et souvent on choisit alors les mêmes vecteurs de base dans les deux référentiels.

☒ V ☐ F c. La vitesse absolue de M est la somme de sa vitesse relative et de la vitesse absolue du point coïncidant (vitesse d'entraînement).

Il s'agit de la loi de composition des vitesses, que l'on obtient à partir de la relation

$$\left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{R_a} = \left(\frac{d\vec{OO'}}{dt} \right)_{R_a} + \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{R_a}.$$

On décompose le vecteur $\vec{O'M}$ sur la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans le cas général ces vecteurs de base sont de direction variable dans le référentiel absolu, il ne faut pas oublier de les dériver :

$$\left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{R_a} = \left(\frac{d}{dt} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \right)_{R_a} = \vec{v}_r + \left(x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt} \right)$$

En regroupant les termes, $\left(\frac{d\vec{OO'}}{dt} \right)_{R_a} + \left(x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt} \right)$ représente la vitesse absolue d'un point dont la position est celle de M , mais qui serait fixe dans R_r . Il s'agit du point coïncidant P . Le résultat du calcul est que

$$\vec{v}_a = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{R_a} = \left(\frac{d\vec{OP}}{dt} \right)_{R_a} + \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{R_r} = \vec{v}_e + \vec{v}_r.$$

☐ V ☒ F d. L'accélération absolue de M est la somme de son accélération relative et de l'accélération absolue du point coïncidant (accélération d'entraînement).

En dérivant à nouveau l'expression précédente par rapport au temps et en tenant compte de la variation des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ par rapport au temps dans le référentiel absolu, il apparaît un terme supplémentaire que l'on appelle accélération complémentaire : $\vec{a}_C = 2 \left(\frac{dx}{dt} \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{d\vec{k}}{dt} \right)$. En dehors du cas particulier de la translation, il faut veiller à ne pas oublier ce terme (aussi appelé accélération de Coriolis).

2 Référentiel relatif en translation par rapport à R_a

☒ V ☐ F a. La vitesse d'entraînement est la même pour tout point en mouvement par rapport à R_r .

Dans le cas d'un référentiel relatif en translation, tous les points coïncidants ont exactement le même mouvement, et donc la vitesse d'entraînement est la même pour tout point M . Pour la déterminer, on peut par exemple considérer le mouvement de l'origine O' .

☒ V ☐ F b. L'accélération d'entraînement est la même pour tout point en mouvement par rapport à R_r .

L'explication est la même que pour la vitesse.

3 Référentiel relatif en rotation autour d'un axe fixe dans R_a

☐ V ☒ F a. La vitesse d'entraînement est la même pour tout point en mouvement par rapport à R_r .

Dans le cas d'une rotation autour d'un axe fixe, les différents points coïncidants décrivent autour de l'axe de rotation des cercles dont le rayon est égal à leur distance à l'axe. La vitesse d'entraînement est d'autant plus grande que le point est éloigné de l'axe.

☐ V ☒ F b. L'accélération d'entraînement est la même pour tout point en mouvement par rapport à R_r .

Comme pour la vitesse d'entraînement, l'accélération d'entraînement dépend forcément de la distance à l'axe de rotation.

QCM

4 R_r est en translation rectiligne accélérée par rapport à R_a et $\overrightarrow{OO'} = \alpha t^2 \vec{K}$ où α a une valeur constante positive. On choisit les mêmes vecteurs de base dans les deux référentiels. La vitesse relative vaut $\vec{v}_r = a t \vec{I}$ avec a une constante. Déterminer la vitesse absolue et sa norme.

☐ a. $\vec{v}_a = a t \vec{I} + \alpha t \vec{K}$ ☒ b. $\vec{v}_a = a t \vec{I} + 2 \alpha t \vec{K}$

☐ c. $v_a = (a + \alpha) t$ ☒ d. $v_a = t \sqrt{4 \alpha^2 + a^2}$

Il s'agit de la combinaison de deux mouvements de translation rectiligne.

D'après la loi de composition des vitesses,

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r = \left(\frac{d\vec{OP}}{dt} \right)_{R_a} + \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{R_r} = \left(\frac{d\vec{OO'}}{dt} \right)_{R_a} + \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{R_r}.$$

En effet puisque R_r est en translation tous les points coïncidants ont la même vitesse par rapport à R_a . En remplaçant : $\vec{v}_a = 2\alpha t \vec{K} + at$. La norme de la vitesse absolue est

$$\|\vec{v}_a\| = \sqrt{(2\alpha t)^2 + (at)^2}.$$

5 Pour le mouvement décrit à la question 4, déterminer l'accélération absolue et sa norme.

☒ a. $\vec{a}_a = 2\alpha \vec{K} + a \vec{I}$ ☐ b. $\vec{a}_a = \alpha \vec{K} + a \vec{I}$

☒ c. $a_a = \sqrt{a^2 + 4\alpha^2}$ ☐ d. $a_a = a + 2\alpha$

Il n'y a pas d'accélération complémentaire puisque R_r est en translation. D'après la loi de composition des accélérations, $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r$. On obtient $\vec{a}_a = a \vec{I} + 2\alpha \vec{K}$.

La norme de ce vecteur est égale à $\sqrt{a^2 + 4\alpha^2}$.

6 Un point matériel M se déplace dans le sens trigonométrique sur un cercle de centre C et de rayon R à la vitesse v_0 constante par rapport au cercle. Le cercle se translate le long de l'axe OZ à la vitesse $\vec{V}_1 = \alpha_1 t \vec{K}$, α_1 étant une constante. Le plan du cercle reste à tout instant parallèle au plan XOY . On notera $\vec{u} = \frac{\vec{CM}}{R}$ et $\vec{w} = \vec{K} \wedge \vec{u}$. Déterminer la vitesse absolue et sa norme.

☐ a. $\vec{v}_a = v_0 \vec{u} + \alpha_1 t \vec{K}$ ☒ b. $\vec{v}_a = v_0 \vec{w} + \alpha_1 t \vec{K}$

☒ c. $\|\vec{v}_a\| = \sqrt{(v_0)^2 + (\alpha_1 t)^2}$ ☐ d. $\|\vec{v}_a\| = |v_0 + \alpha_1 t|$

Le référentiel relatif est le cercle, en translation par rapport au référentiel absolu.

D'après la loi de composition des vitesses, $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$.

Vitesse d'entraînement : $\vec{v}_e = \vec{V}_1 = \alpha_1 t \vec{K}$ (on utilise ici la vitesse du centre puisque tous les points du cercle ont la même vitesse absolue).

Vitesse relative : $\vec{v}_r$ est la vitesse par rapport au cercle, tangente au cercle donc $\vec{v}_r = v_0 \vec{w}$ (vu le sens de parcours).

On obtient donc $\vec{v}_a = v_0 \vec{w} + \alpha_1 t \vec{K}$.

Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{K}$ étant perpendiculaires (d'après leur définition, $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont dans le plan XOY), la norme de cette vitesse est $\|\vec{v}_a\| = \sqrt{(v_0)^2 + (\alpha_1 t)^2}$.

7 Pour le mouvement décrit à la question 6, déterminer l'accélération absolue et sa norme.

☒ a. $\vec{a}_a = \alpha_1 \vec{K} - \frac{v_0^2}{R} \vec{u}$ ☐ b. $\vec{a}_a = \alpha_1 \vec{K} + \frac{v_0^2}{R} \vec{u}$

☒ c. $\|\vec{a}_a\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \frac{v_0^4}{R^2}}$ ☐ d. $\|\vec{a}_a\| = \left| \alpha_1 - \frac{v_0^2}{R} \right|$

D'après la loi de composition des accélérations pour un référentiel relatif en translation, $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r$.

Accélération d'entraînement : $\vec{a}_e = \left(\frac{dV_C}{dt} \right)_{R_a} = \alpha_1 \vec{K}$ en utilisant à nouveau le mouvement du centre du cercle.

Accélération relative : pour un mouvement circulaire uniforme, elle est centripète, de norme $\frac{v_0^2}{R}$ donc $\vec{a}_r = -\frac{v_0^2}{R} \vec{u}$. Finalement, $\vec{a}_a = \alpha_1 \vec{K} + -\frac{v_0^2}{R} \vec{u}$.

La norme de cette accélération vaut $\|\vec{a}_a\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \frac{v_0^4}{R^2}}$; on remarque qu'elle est constante (mais la direction du vecteur accélération varie au cours du temps).

8 R_r est en rotation d'axe OZ par rapport à R_a de vecteur rotation $\vec{\omega} = \omega \vec{K}$ où ω a une valeur constante. L'axe Ox lié à R_r est perpendiculaire à $\vec{K}$. La vitesse relative vaut $\vec{v}_r = (v_0 + at) \vec{i}$ avec v_0 et a deux constantes. À $t = 0$, le point M est sur l'axe Ox à une distance D du point O . Déterminer les composantes de la vitesse absolue sur le repère $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

☐ a. $v_{ax} = v_0 + at + \omega D$ ☒ b. $v_{ax} = v_0 + at$

☒ c. $v_{ay} = \left(D + v_0 t + \frac{at^2}{2} \right) \omega$ ☐ d. $v_{ay} = (v_0 t + at^2) \omega$

On combine ici un mouvement d'entraînement de rotation uniforme avec un mouvement relatif rectiligne accéléré.

D'après la loi de composition des vitesses, $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$.

Vitesse d'entraînement : le point coïncidant décrit à l'instant t un arc de cercle de rayon $R(t) = OM(t) = x(t)$. D'après les conditions initiales $x(0) = D$ donc $x(t) = D + v_0 t + \frac{at^2}{2}$. La vitesse $\vec{v}_e$ est tangente à l'arc de cercle, elle est colinéaire au vecteur $\vec{j}$: $\vec{v}_e = \left(D + v_0 t + \frac{at^2}{2} \right) \omega \vec{j}$.

La vitesse absolue est $\vec{v}_a = \left(D + v_0 t + \frac{at^2}{2} \right) \omega \vec{j} + (v_0 + at) \vec{i}$

- 9** Pour le mouvement décrit à la question 8, déterminer les composantes sur le repère $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'accélération absolue.

☐ a. $a_{ax} = a + 2\omega(v_0 + at)$
☒ b. $a_{ax} = a - \left(D + v_0t + \frac{at^2}{2}\right)\omega^2$
☐ c. $a_{ay} = -\left(D + v_0t + \frac{at^2}{2}\right)\omega^2$
☒ d. $a_{ay} = 2\omega(v_0 + at)$

D'après la loi de composition des accélérations pour un référentiel relatif en rotation, $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$.

L'accélération d'entraînement est centripète puisque la rotation est uniforme ; elle est égale à $\vec{a}_e = -\omega^2 \overrightarrow{OM} = -\left(D + v_0t + \frac{at^2}{2}\right)\omega^2 \vec{i}$.

L'accélération relative, pour le mouvement rectiligne de vitesse $(v_0 + at)\vec{i}$, est égale à $\vec{a}_r = \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_{R_r} = a\vec{i}$.

L'accélération complémentaire, pour une rotation autour d'un axe fixe de vecteur rotation $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$, est égale à $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = (2\omega \vec{k}) \wedge ((v_0 + at)\vec{i}) = 2\omega(v_0 + at)\vec{j}$.

L'accélération absolue vaut donc

$$\left[a - \left(D + v_0t + \frac{at^2}{2}\right)\omega^2\right]\vec{i} + 2\omega(v_0 + at)\vec{j}.$$

- 10** Un cerceau de centre C et de rayon R roule sans glisser sur le plan horizontal XOY , C décrivant une trajectoire circulaire de rayon b à vitesse V_C constante dans le sens trigonométrique direct par rapport à l'axe Oz . Soit B le point de contact avec le plan OXY . Le cerceau reste à tout instant dans un plan vertical. On choisit comme référentiel relatif un référentiel en rotation uniforme d'axe OZ , de vitesse angulaire $\Omega = \frac{V_C}{b}$. On

notera $\vec{i} = \frac{\overrightarrow{OB}}{b}$ et $\vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{i}$. Soit D le point du cerceau diamétralement opposé à B .

- ☐ a. le mouvement relatif de D est circulaire de rayon b .
☒ b. le mouvement relatif de D est circulaire de rayon R .
☒ c. la vitesse angulaire du mouvement relatif est égale à $\frac{V_C}{R}$
☐ d. la vitesse angulaire du mouvement relatif est égale à $\frac{V_C}{b}$

Le point D reste à distance fixe R de C , donc le mouvement est circulaire de rayon R .

Pour un tour complet de la roue, donc pendant une période de rotation du mouvement relatif, le centre parcourt une distance $2\pi R$ égale au périmètre de la roue (roulement sans

glissement) à la vitesse V_C . L'intervalle de temps Δt correspondant vérifie $V_C = \frac{2\pi R}{\Delta t}$ donc la vitesse angulaire de rotation de la roue est $\omega = \frac{2\pi}{\Delta t} = \frac{V_C}{R}$.

Les questions 11 à 13 utilisent les hypothèses de la question 10.

11 Déterminer les composantes de la vitesse absolue de D .

☒ a. $\vec{v}_a = 2V_C \vec{j}$ ☐ b. $\vec{v}_a = V_C (\vec{j} + \vec{K})$

☐ c. $\vec{v}_a = V_C (\vec{j} - \vec{K})$ ☐ d. $\vec{v}_a = \vec{0}$

Le mouvement de D est la combinaison d'une rotation d'axe OZ et de vecteur rotation $\vec{\Omega} = \frac{V_C}{b} \vec{K}$, avec une rotation d'axe $(C, \vec{i})$ et de vecteur rotation $\vec{\omega} = \frac{V_C}{R} \vec{i}$ (le signe « - » est dû au sens de rotation de la roue quand C se déplace dans le sens trigonométrique).

D'après la loi de composition des vitesses, $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$.

Vitesse d'entraînement : le point coïncidant décrit à l'instant t un arc de cercle d'axe OZ , de vecteur rotation $\vec{\Omega}$ donc $\vec{v}_e = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OD} = \Omega \vec{K} \wedge \overrightarrow{OC} = \vec{V}_C = V_C \vec{j}$.

Vitesse relative : $\vec{v}_r = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CD} = -\frac{V_C}{R} \vec{i} \wedge R \vec{K} = V_C \vec{j}$. Au total $\vec{v}_a = 2V_C \vec{j}$.

12 Déterminer les composantes de l'accélération absolue de D .

☒ a. $\vec{a}_a = -\frac{3V_C^2}{b} \vec{i} - \frac{V_C^2}{R} \vec{K}$ ☐ b. $\vec{a}_a = -4 \frac{V_C^2}{R} \vec{i}$

☐ c. $\vec{a}_a = \vec{0}$ ☐ d. $\vec{a}_a = -\frac{3V_C^2}{b} \vec{i} + \frac{V_C^2}{R} \vec{K}$

Accélération d'entraînement : elle est centripète, donc dirigée selon $-\vec{i}$ et de norme $b\Omega^2$ donc $\vec{a}_e = -\frac{V_C^2}{b} \vec{i}$.

Accélération relative : elle aussi est centripète, dirigée selon $-\vec{K}$, de norme $R\omega^2$ donc $\vec{a}_e = -\frac{V_C^2}{R} \vec{K}$.

Accélération complémentaire : $\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r = 2\left(\frac{V_C}{b}\right) \vec{K} \wedge (V_C \vec{j}) = -2 \frac{V_C^2}{b} \vec{i}$.

En sommant les trois termes : $\vec{a}_a = \left(-2 \frac{V_C^2}{b} - \frac{V_C^2}{b}\right) \vec{i} - \frac{V_C^2}{R} \vec{K}$

13 Déterminer les composantes de l'accélération absolue de B .

☒ a. $\vec{a}_a = \frac{V_C^2}{b} \vec{i} + \frac{V_C^2}{R} \vec{K}$ ☐ b. $\vec{a}_a = \frac{V_C^2}{R} \vec{i} + \frac{V_C^2}{b} \vec{K}$

☐ c. $\vec{a}_a = \vec{0}$ ☐ d. $\vec{a}_a = \frac{2V_C^2}{b} \vec{i}$

L'accélération d'entraînement de B , diamétralement opposé à D , est la même.

L'accélération relative, centripète donc dirigée vers C , est opposée à celle de D .

L'accélération complémentaire est elle aussi opposée à celle de D parce que les vitesses relatives des deux points sont opposées.

En sommant les trois termes on obtient : $\vec{a}_a(B) = \left(2\frac{V_C^2}{b} - \frac{V_C^2}{b}\right) \vec{i} + \frac{V_C^2}{R} \vec{K} = \frac{V_C^2}{b} \vec{i} + \frac{V_C^2}{R} \vec{K}$.

18 Référentiels non galiléens

VRAI/FAUX

1 Généralités

☒ V ☐ F a. Dans R' en translation rectiligne uniforme par rapport à R , les forces d'inertie sont nulles.

Un référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen ; donc il n'y a pas de forces d'inertie.

☐ V ☒ F b. Dans R' en rotation par rapport à R , la force d'inertie d'entraînement est centripète.

C'est l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e$ qui est centripète, la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e$ est centrifuge.

☐ V ☒ F c. Dans R' en rotation par rapport à R , tous les points subissent la force d'inertie de Coriolis.

La force d'inertie de Coriolis est donnée par l'expression $\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/R'}$, où $\vec{v}_{M/R'}$ est la vitesse du point M dans R' , donc les points immobiles dans R' ne subissent pas cette force.

☐ V ☒ F d. Le référentiel géocentrique a un mouvement de rotation par rapport au référentiel héliocentrique.

Les deux référentiels ont des axes de directions fixes par rapport à des étoiles lointaines. Les axes du référentiel géocentrique restent donc parallèles à ceux du référentiel héliocentrique, son mouvement est une translation elliptique (quasi circulaire).

☒ V ☐ F e. C'est Léon Foucault qui a mis en évidence expérimentalement que le référentiel terrestre n'est pas galiléen.

C'est avec l'expérience du pendule de Foucault (qui porte donc son nom), suspendu sous le dôme du Panthéon à Paris que Léon Foucault a montré que le référentiel terrestre n'était pas galiléen. En effet, le pendule n'oscille pas dans un plan fixe, mais dans un plan qui tourne au cours de la journée en raison de la rotation de la Terre avec une vitesse angulaire $-\Omega \sin \lambda$, où Ω est la vitesse angulaire de rotation de la Terre et λ la latitude.

QCM

2 On considère un wagon (référentiel R') auquel est lié le repère (O, x, y, z) avec le plan Oxy horizontal et l'axe Oz orienté vers le haut. Le référentiel R' se déplace avec une accélération constante $\vec{a} = -a\vec{u}_x$ par rapport au référentiel R . Une personne fixe en O dans R' lance une balle (masse m) verticalement depuis le point O avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_z$. Déterminer la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie}$ et la force d'inertie de Coriolis $\vec{f}_{ic}$ s'exerçant sur la balle dans R' .

- ☐ a. $\vec{f}_{ie} = -ma\vec{u}_x$ ☒ b. $\vec{f}_{ie} = ma\vec{u}_x$
☒ c. $\vec{f}_{ic} = \vec{0}$ ☐ d. $\vec{f}_{ic} = -2m\dot{x}\vec{u}_y$

Le référentiel R' est en translation par rapport au référentiel R , donc la force d'inertie de Coriolis est nulle et la force d'inertie d'entraînement est $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a} = ma\vec{u}_x$.

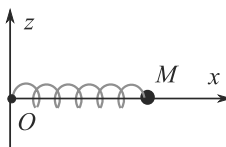
3 Établir les équations $x(t)$ et $z(t)$ du mouvement pour la masse précédente dans R' .

- ☐ a. $x = 0$ ☒ b. $x = \frac{at^2}{2}$
☒ c. $z = -\frac{gt^2}{2} + v_0t$ ☐ d. $z = -\frac{gt^2}{2}$

Dans R' , deux forces s'exercent sur la balle, le poids et $\vec{f}_{ie}$. Après simplification par m , la relation fondamentale de la dynamique en projection sur Ox s'écrit $\ddot{x} = a$ et sur Oz , $\ddot{z} = -g$. Une première intégration donne $\dot{x} = at$ et $\dot{z} = -gt + v_0$.

Une deuxième intégration mène à $x = \frac{at^2}{2}$ et $z = -\frac{gt^2}{2} + v_0t$.

4 Un ressort (k, ℓ_0) est attaché à un point O fixe. Un point M de masse m est attaché à l'extrémité libre du ressort. L'axe Ox est en rotation à la vitesse angulaire ω constante autour d'un axe Oz vertical. On note R' le référentiel lié à Ox et Oy (troisième axe du trièdre direct).



Les forces d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie}$ et de Coriolis $\vec{f}_{ic}$ s'exerçant sur M dans R sont :

☐ a. $\vec{f}_{ie} = -m\omega^2 x \vec{u}_x$ ☒ b. $\vec{f}_{ie} = m\omega^2 x \vec{u}_x$

☐ c. $\vec{f}_{ic} = -m\omega x \vec{u}_y$ ☐ d. $\vec{f}_{ic} = 2m\omega x \vec{u}_y$

La force d'inertie d'entraînement est une force centrifuge $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e$, avec ici l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e = -\omega^2 x \vec{u}_x$. La force d'inertie de Coriolis est $\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/R'}$, or $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$ et $\vec{v} = x \vec{u}_x$ soit $\vec{f}_{ic} = -2m\omega x \vec{u}_y$ donc aucune réponse n'est juste.

5 Déterminer la position d'équilibre de la masse M dans R' .

☒ a. $x'_e = \frac{k\ell_0}{k - m\omega^2}$ ☐ b. $x'_e = \ell_0$

☐ c. $x'_e = \frac{-k\ell_0}{k + m\omega^2}$ ☐ d. Il n'y a pas de position d'équilibre.

Les différentes forces qui s'exercent dans R' sont le poids (vertical), la réaction d'axe (perpendiculaire à Ox), la force d'inertie de Coriolis (selon Oy), enfin les deux forces selon Ox : la force d'inertie d'entraînement et la tension du ressort. En projection sur Ox , la relation d'équilibre donne donc $-k(x'_e - \ell_0) + m\omega^2 x'_e = 0$ soit $x'_e = \frac{k\ell_0}{k - m\omega^2}$.

6 Établir l'équation du mouvement pour la masse précédente dans R' et l'expression de la pulsation ω'_0 des oscillations.

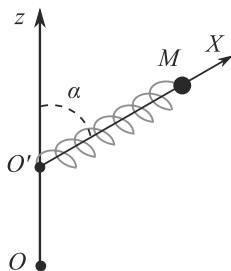
☐ a. $m\ddot{x} + kx = kx'_e$ ☒ b. $m\ddot{x} + (k - m\omega^2)x = (k - m\omega^2)x'_e$

☐ c. $\omega'_0 = \sqrt{k/m}$ ☒ d. $\omega'_0 = \sqrt{(k - m\omega^2)/m}$

On écrit la projection de l'équation fondamentale de la dynamique dans R' . Soit $m\ddot{x} = -k(x - \ell_0) + m\omega^2 x$. On peut introduire x'_e , ce qui donne $m\ddot{x} + (k - m\omega^2)x = (k - m\omega^2)x'_e$. En divisant par m , on trouve une équation d'oscillateur harmonique $\ddot{x} + \omega_0'^2 x = \omega_0'^2 x'_e$ avec $\omega'_0 = \sqrt{(k - m\omega^2)/m}$ ou $\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$.

7 On étudie un sismographe constitué d'une tige $O'X$, sur laquelle est monté un point M de masse m relié à un ressort (k, ℓ_0) . L'axe Oz fixe est lié au référentiel galiléen R et l'axe $O'X$ est lié au référentiel R' . Le point O' a un mouvement oscillatoire dans R : $z_{O'} = a \cos \omega t$. D'autre part, le point M subit une force de frottement visqueux $\vec{f}_f = -h\dot{X}\vec{u}_X$ où $\vec{u}_X$ est un vecteur unitaire de l'axe $O'X$. La position d'équilibre lorsque O' est immobile est $X_e = \ell_0 + \frac{mg \cos \alpha}{k}$. On note $\eta = X - X_e$, l'écart par rapport à l'équilibre.

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par η .



- ☐ a. $m\ddot{\eta} + h\dot{\eta} + k\eta = 0$
☐ b. $m\ddot{\eta} - h\dot{\eta} - k\eta = m\omega^2 \cos \alpha \cos \omega t$
☒ c. $m\ddot{\eta} + h\dot{\eta} + k\eta = m\omega^2 \cos \alpha \cos \omega t$
☐ d. $m\ddot{\eta} + h\dot{\eta} + k\eta = -m\omega^2 \cos \alpha \cos \omega t$

On raisonne dans R' qui est en translation par rapport à R , donc il n'y a pas de force d'inertie de Coriolis. Les forces s'exerçant sur M sont : le poids (vertical), la réaction d'axe (perpendiculaire à $O'X$), la tension du ressort $\vec{T} = -k(X - \ell_0)\vec{u}_X$, la force de frottement et la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e$. Or ici, l'accélération d'entraînement est $\vec{a}_e = \frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2}$ soit $\vec{a}_e = -a\omega^2 \cos \omega t \vec{u}_z$. L'équation du mouvement en projection sur $O'X$ est : $m\ddot{X} = -k(X - \ell_0) - h\dot{X} - mg \cos \alpha + m\omega^2 \cos \omega t \cos \alpha$. En utilisant l'expression de X_e et sachant que $\dot{\eta} = \dot{X}$ et $\ddot{\eta} = \ddot{X}$, l'équation devient : $m\ddot{\eta} + h\dot{\eta} + k\eta = m\omega^2 \cos \alpha \cos \omega t$

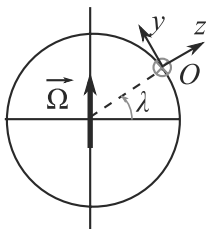
8 On cherche des solutions au régime forcé de la forme $\eta = \eta_0 \cos(\omega t + \phi)$. En utilisant les complexes, et en posant $\underline{\eta} = \underline{\eta}_0 e^{i\omega t}$ et $\eta = \text{Re}(\underline{\eta})$, déterminer l'amplitude complexe $\underline{\eta}_0 = \eta_0 e^{i\phi}$ et son module η_0 .

- ☒ a. $\underline{\eta}_0 = \frac{a\omega^2 \cos \alpha}{\frac{k}{m} - \omega^2 + i\frac{h}{m}\omega}$ ☐ b. $\underline{\eta}_0 = \frac{a\omega^2 \cos \alpha \cos \omega t}{\frac{k}{m} - \omega^2 + i\frac{h}{m}\omega}$
☒ c. $\eta_0 = \frac{a\omega^2 \cos \alpha}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{h}{m}\omega\right)^2}}$ ☐ d. $\eta_0 = \frac{a\omega^2 \cos \alpha \cos \omega t}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{h}{m}\omega\right)^2}}$

En complexe, l'équation devient $\underline{\eta}_0 \left(\frac{k}{m} - \omega^2 + i\frac{h}{m}\omega \right) e^{i\omega t} = a\omega^2 \cos \alpha e^{i\omega t}$ donc $\underline{\eta}_0 = \frac{a\omega^2 \cos \alpha}{\frac{k}{m} - \omega^2 + i\frac{h}{m}\omega}$ soit $\eta_0 = \frac{a\omega^2 \cos \alpha}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{h}{m}\omega\right)^2}}$.

9 On se place dans le référentiel terrestre non galiléen R' en rotation autour de l'axe des pôles à la vitesse angulaire Ω par rapport au référentiel galiléen géocentrique R . On étudie le mouvement d'un point M , de masse m , en un lieu de latitude λ repéré par les axes Ox (vers l'est), Oy (vers le nord), Oz (verticale du lieu passant par le centre de la

Terre). On note $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur et H , le projeté du point M sur l'axe des pôles. Faire le bilan des forces s'exerçant sur M dans R' .



- ☐ a. Poids, force d'inertie d'entraînement, force d'inertie de Coriolis.
- ☒ b. Poids, force d'inertie de Coriolis.
- ☐ c. Poids, force d'inertie d'entraînement.
- ☐ d. Poids

Par définition, le poids est la somme vectorielle de l'attraction gravitationnelle et de la force d'inertie d'entraînement, donc la réponse **b.** est juste car la réponse **a.** compte deux fois la force d'inertie d'entraînement.

10 On tire le projectile M à la verticale avec une vitesse $\vec{v}_0$ depuis le point O . Écrire les équations du mouvement en projection sur (O, x, y, z) .

- ☒ a. $\ddot{x} = 2\Omega(\dot{y} \sin \lambda - \dot{z} \cos \lambda)$ ☐ b. $\ddot{y} = 2\Omega\dot{x} \sin \lambda$
- ☒ c. $\ddot{z} = 2\Omega\dot{x} \cos \lambda - g$ ☐ d. $\ddot{z} = 2\Omega\dot{x} \cos \lambda$

En projection le vecteur $\vec{\Omega}$ s'écrit $\vec{\Omega} = \Omega(\cos \lambda \vec{u}_y + \sin \lambda \vec{u}_z)$ et la force d'inertie de Coriolis est obtenue par $\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/R'}$ avec $\vec{v}_{M/R'} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$. Quant au poids, c'est $-mg\vec{u}_z$. En projection sur les trois axes, la relation fondamentale donne après simplification par m : $\ddot{x} = 2\Omega(\dot{y} \sin \lambda - \dot{z} \cos \lambda)$, $\ddot{y} = -2\Omega\dot{x} \sin \lambda$, $\ddot{z} = 2\Omega\dot{x} \cos \lambda - g$.

11 Après intégration des équations projetées sur Oy et Oz , écrire l'équation différentielle pour x .

- ☐ a. $\ddot{x} + 4\Omega^2 x = 2\Omega \cos \lambda g t$
- ☐ b. $\ddot{x} + 4\Omega^2 \dot{x} t (\cos \lambda + \sin \lambda) = 2\Omega g t \cos \lambda$
- ☒ c. $\ddot{x} + 4\Omega^2 x = 2\Omega \cos \lambda (g t - v_0)$
- ☐ d. $\dot{x} = 2\Omega(-z \cos \lambda + y \sin \lambda)t - 2\Omega v_0 \cos \lambda$

On intègre l'équation projetée sur Oy ce qui donne $\dot{y} = -2\Omega x \sin \lambda + cte$, or initialement $\dot{y}(0) = 0$ et $x(0) = 0$ donc $cte = 0$. On intègre l'équation projetée sur Oz ce qui donne $\dot{z} = 2\Omega x \cos \lambda - g t + cte$, or initialement $\dot{z}(0) = v_0$ et $x(0) = 0$ donc $cte = v_0$. On remplace dans l'équation projetée sur Ox et on trouve $\ddot{x} + 4\Omega^2 x = 2\Omega \cos \lambda (g t - v_0)$.

12 En négligeant le terme en Ω^2 , déterminer les expressions de $\dot{x}$ et x en fonction du temps.

☐ a. $\dot{x} = 2\Omega \cos \lambda (gt^2 - v_0 t)$ ☒ b. $\dot{x} = 2\Omega \cos \lambda \left(\frac{gt^2}{2} - v_0 t \right)$

☐ c. $x = 2\Omega \cos \lambda (gt^3 - v_0 t^2)$ ☒ d. $x = \Omega \cos \lambda \left(\frac{gt^3}{3} - v_0 t^2 \right)$

Si on néglige le terme en Ω^2 , alors l'équation différentielle pour x s'écrit :
 $\ddot{x} = 2\Omega \cos \lambda (gt - v_0)$.

Une première intégration donne $\dot{x} = 2\Omega \cos \lambda \left(\frac{gt^2}{2} - v_0 t \right) + cte$. Or à $t = 0$, on a $\dot{x}(0) = 0$, donc la $cte = 0$.

Une deuxième intégration donne $x = \Omega \cos \lambda \left(\frac{gt^3}{3} - v_0 t^2 \right) + cte'$. Comme $x(0) = 0$, on a aussi $cte' = 0$.

13 L'instant de retour au sol est $t_s = 2v_0/g$; en déduire la déviation x_s suivant Ox et celle y_s suivant Oy en négligeant les termes en Ω^2 .

☐ a. $x_s \approx 0$ ☒ b. $x_s \simeq -\frac{4}{3}\Omega \frac{v_0^3}{g^2} \cos \lambda$

☒ c. $y_s \approx 0$ ☐ d. $y_s \simeq -\frac{16}{3}\Omega^2 \frac{v_0^4}{g^3} \cos \lambda \sin \lambda$

Pour t_s , on trouve $x_s = -\frac{4}{3}\Omega \frac{v_0^3}{g^2} \cos \lambda$. Pour y , l'équation du mouvement intégrée une fois trouvée à la question 11, donne, en remplaçant x par son expression : $\dot{y} = -2\Omega^2 \sin \lambda \cos \lambda \left(\frac{gt^3}{3} - v_0 t^2 \right)$, donc si l'on néglige les termes en Ω^2 alors $\dot{y} \approx 0$ et $y_s \approx 0$, ce qui signifie que la déviation selon Oy est beaucoup plus petite que selon Ox .

19 Système de deux points matériels (MPSI)

VRAI/FAUX

1 Propriétés du référentiel barycentrique

☐ V ☒ F a. Le référentiel barycentrique peut avoir un mouvement de translation ou de rotation par rapport à R .

Par définition, le référentiel barycentrique est lié à G et est en translation par rapport à R . Ses axes restent parallèles à ceux de R au cours du mouvement.

☐ V ☒ F b. Le référentiel barycentrique est galiléen.

Pour être galiléen, il faut que la translation soit rectiligne uniforme, donc que le mouvement de G dans R soit lui aussi rectiligne uniforme. La relation fondamentale de la dynamique appliquée au système s'écrit $\frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{int}$. Comme la résultante des forces intérieures $\vec{F}_{int}$ est nulle, il faut que le système soit isolé ($\vec{F}_{ext} = \vec{0}$) pour avoir $\vec{v}_G = \vec{cte}$.

☒ V ☐ F c. Dans le référentiel barycentrique, la quantité de mouvement totale est nulle.

Comme on démontre dans la suite, la quantité de mouvement totale dans un référentiel R est égale à $m\vec{v}_{G/R}$, c'est valable aussi pour R^* dans lequel la vitesse de G est nulle.

☒ V ☐ F d. Dans le référentiel barycentrique, le moment cinétique total est indépendant du point par rapport auquel on le calcule.

Pour démontrer cela, il suffit d'introduire le point G avec la relation de Chasles dans l'expression du moment cinétique par rapport à un point A :

$$\vec{L}_A^* = \sum_1^2 \vec{AM}_i \wedge m_i \vec{v}_i^* = \sum_1^2 \vec{AG} \wedge m_i \vec{v}_i^* + \sum_1^2 \vec{GM}_i \wedge m_i \vec{v}_i^* = \vec{AG} \wedge \sum_1^2 m_i \vec{v}_i^* + \vec{L}_G^*$$

Comme la quantité de mouvement totale $\sum_1^2 m_i \vec{v}_i^*$ dans R^* est nulle, on trouve que $\forall A$, $\vec{L}_A^* = \vec{L}_G^* = \vec{L}^*$.

☐ V ☒ F e. Dans le référentiel barycentrique, l'énergie cinétique totale est nulle.

Elle est égale à $\frac{1}{2} \sum_1^2 m_i \vec{v}_i^{*2}$ qui est nulle uniquement si les vitesses sont nulles.

2 Les forces intérieures :

☒ V ☐ F a. La résultante des forces intérieures est nulle.

C'est une application directe de la troisième loi de Newton : $\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{f}_{2 \rightarrow 1}$ donc $\vec{f}_{int} = \vec{f}_{1 \rightarrow 2} + \vec{f}_{2 \rightarrow 1} = \vec{0}$.

☐ V ☒ F b. Le moment des forces intérieures n'est pas nul.

On calcule le moment des forces intérieures en un point A :

$$\vec{M}_A = \vec{M}_1 \vec{A} \wedge \vec{f}_{2 \rightarrow 1} + \vec{M}_2 \vec{A} \wedge \vec{f}_{1 \rightarrow 2} = (\vec{M}_1 \vec{A} - \vec{M}_2 \vec{A}) \wedge \vec{f}_{2 \rightarrow 1} = \vec{M}_2 \vec{M}_1 \wedge \vec{f}_{2 \rightarrow 1}$$

Or les types de forces d'interaction existants entre points matériels sont colinéaires à $\vec{M}_1 \vec{M}_2$, donc $\vec{M}_A = \vec{0}$

QCM

3 Quelle(s) relation(s) vérifie(nt) le centre de masse G ?

- ☐ a. $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ ☒ b. $(m_1 + m_2)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}$
☐ c. $\overrightarrow{GM_1} + \overrightarrow{GM_2} = \vec{0}$ ☒ d. $m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = \vec{0}$

Par définition, le centre de masse est le barycentre des points M_1 et M_2 , avec les masses comme coefficients de pondération, donc $m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = \vec{0}$. En utilisant la relation de Chasles avec le point O , on obtient la relation **b**.

4 Exprimer la quantité de mouvement totale $\vec{P}$ et l'énergie cinétique totale E_c dans R .

- ☐ a. $\vec{P} = m(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$ ☒ b. $\vec{P} = m\vec{v}_G$
☒ c. $E_c = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$ ☐ d. $E_c = \frac{1}{2}mv_G^2$

Par définition la quantité de mouvement totale dans R est $\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$. En utilisant la définition du centre de masse, on peut écrire : $\left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_R = \frac{1}{m} \left(m_1\frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt} + m_2\frac{d\overrightarrow{OM_2}}{dt}\right)$, soit $m\vec{v}_G = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{P}$. En ce qui concerne l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$, mais on ne peut réduire l'expression à $\frac{1}{2}mv_G^2$.

5 Déterminer l'expression du travail des forces intérieures δW_{int} :

- ☐ a. $\delta W_{int} = \overrightarrow{f_{2 \rightarrow 1}} \cdot d\overrightarrow{M_1M_2}$ ☐ b. $\delta W_{int} = \overrightarrow{f_{1 \rightarrow 2}} \cdot d\overrightarrow{M_2M_1}$
☒ c. $\delta W_{int} = \overrightarrow{f_{1 \rightarrow 2}} \cdot d\overrightarrow{M_1M_2}$ ☒ d. $\delta W_{int} = \overrightarrow{f_{2 \rightarrow 1}} \cdot d\overrightarrow{M_2M_1}$

Tout d'abord, on sait par la troisième loi de Newton que $\overrightarrow{f_{1 \rightarrow 2}} = -\overrightarrow{f_{2 \rightarrow 1}}$. Le travail élémentaire est :

$$\delta W_{int} = \overrightarrow{f_{1 \rightarrow 2}} \cdot d\overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{f_{2 \rightarrow 1}} \cdot d\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{f_{1 \rightarrow 2}} \cdot (d\overrightarrow{OM_2} - d\overrightarrow{OM_1}) = \overrightarrow{f_{1 \rightarrow 2}} \cdot d\overrightarrow{M_1M_2}$$

La réponse **d**. est aussi valable puisque $\overrightarrow{f_{1 \rightarrow 2}} = -\overrightarrow{f_{2 \rightarrow 1}}$ et $d\overrightarrow{M_1M_2} = -d\overrightarrow{M_2M_1}$.

6 On note δW_{ext} , le travail élémentaire des forces extérieures. Le théorème de l'énergie cinétique dans R s'écrit :

- ☒ a. $dE_c = \delta W_{int} + \delta W_{ext}$ ☐ b. $d\left(\frac{1}{2}mv_G^2\right) = \delta W_{int} + \delta W_{ext}$
☐ c. $dE_c = \delta W_{ext}$ ☒ d. $d\left(\sum_1^2 \frac{1}{2}m_i v_i^2\right) = \delta W_{int} + \delta W_{ext}$

Pour la particule i , le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$dE_{c,i} = d\left(\frac{1}{2}mv_i^2\right) = \vec{f}_{j \rightarrow i} \cdot d\vec{OM}_i + \delta W_{ext,i}$$

où δW_{ext} est le travail de la force extérieure s'exerçant sur M_i . En sommant sur les deux particules, on obtient :

$$dE_c = \sum_1^2 d\left(\frac{1}{2}mv_i^2\right) = \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot d\vec{OM}_1 + \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot d\vec{OM}_1 + \delta W_{ext,1} + \delta W_{ext,2} = \delta W_{int} + \delta W_{ext}$$

donc **a.** et **d.** sont valables.

7 Les forces $\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = -k\vec{M}_1\vec{M}_2$ et $\vec{f}_{2 \rightarrow 1} = -k\vec{M}_2\vec{M}_1$ dérivent d'une énergie potentielle. On note $E_{p,int}$ l'énergie potentielle d'interaction entre M_1 et M_2 et $E_{p,ext}$ l'énergie potentielle des forces extérieures. Définir $E_{p,int}$ et écrire l'expression de l'énergie mécanique du système E_m .

☒ **a.** $E_{p,int} = \frac{1}{2}k(M_1M_2)^2$ ☐ **b.** $E_{p,int} = \frac{1}{2}k(OM_1)^2 + \frac{1}{2}k(OM_2)^2$

☐ **c.** $E_M = E_c + 2E_{p,int} + E_{p,ext}$ ☒ **d.** $E_M = E_c + E_{p,int} + E_{p,ext}$

Le travail des forces intérieures est :

$$\delta W_{int} = \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot d\vec{M}_1\vec{M}_2 = -k\vec{M}_1\vec{M}_2 \cdot d\vec{M}_1\vec{M}_2 = -d\left(\frac{1}{2}k(M_1M_2)^2\right)$$

donc l'énergie potentielle correspondante est telle que $\delta W_{int} = -dE_{p,int}$ soit $E_{p,int} = \frac{1}{2}k(M_1M_2)^2$ si l'on choisit $E_{p,int} = 0$ pour $M_1M_2 = 0$. C'est cette énergie potentielle qui représente l'énergie potentielle d'interaction entre les deux points.

En ce qui concerne les forces extérieures si l'on considère qu'elles sont toutes conservatives alors $\delta W_{ext} = -dE_{p,ext}$ sinon $\delta W_{ext} = -dE_{p,ext} + \delta W_{nc}$ (indice « nc » pour non conservative). Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit

$$dE_c = \delta W_{int} + \delta W_{ext} = -dE_{p,int} - dE_{p,ext} + \delta W_{ext,nc}$$

ou $d(E_c + E_{p,int} + E_{p,ext}) = \delta W_{ext,nc}$, soit $E_M = E_c + E_{p,int} + E_{p,ext}$.



L'erreur à ne pas commettre est de comptabiliser deux fois l'énergie potentielle d'interaction car il y a deux particules.

8 On note $\vec{v}$ la vitesse relative $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Exprimer l'énergie cinétique totale dans le référentiel barycentrique en fonction de $\vec{v}$:

☐ **a.** $E_c^* = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$ ☐ **b.** $E_c^* = \frac{1}{2} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} v^2$

☐ **c.** $E_c^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2$ ☒ **d.** $E_c^* = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2$

La loi de composition des vitesses donne $\vec{v}_j^* = \vec{v}_i - \vec{v}_G$, donc $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2^* - \vec{v}_1^*$. D'autre part, $\vec{v}_G = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$; en reportant ce résultat dans la loi de composition des vitesses, on obtient : $\vec{v}_1^* = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}$ et $\vec{v}_2^* = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}$. Avec $E_c^* = \frac{1}{2} m_1 v_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{*2}$, on obtient après calcul $E_c^* = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2$.

9 On définit la particule fictive M dans le référentiel R^* par $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1 M_2}$. Quelle est la masse équivalente μ de cette particule ?

☐ a. $\mu = m_1 + m_2$ ☒ b. $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$

☒ c. $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ ☐ d. $\mu = \frac{m_1 + m_2}{2}$

À l'image de ce qui a été fait dans la question précédente, on pourrait démontrer que le moment cinétique total dans R^* est $\vec{L}^* = \overrightarrow{M_1 M_2} \wedge \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}$. La vitesse de M dans R^* est $\vec{v}^* = \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{M_1 M_2}}{dt} = \vec{v}_2^* - \vec{v}_1^*$. Il apparaît donc que le mouvement relatif (c'est-à-dire dans R^*) peut être décrit par la particule M , de masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, d'énergie cinétique E_c^* et de moment cinétique $\vec{L}^*$. Par inversion de l'expression de μ , on trouve aussi la réponse **b**.

10 La force $\vec{f}$ s'exerçant sur la particule fictive est donnée par l'expression suivante :

☐ a. $\vec{f} = \vec{f}_{1 \rightarrow 2} + \vec{f}_{2 \rightarrow 1} = \vec{0}$ ☒ b. $\vec{f} = \vec{f}_{1 \rightarrow 2}$

☐ c. $\vec{f} = \vec{f}_{1 \rightarrow 2} - \vec{f}_{2 \rightarrow 1}$ ☐ d. $\vec{f} = \vec{f}_{2 \rightarrow 1}$

On calcule $\frac{d(\mu \vec{v})}{dt}$ (dérivée de la quantité de mouvement de la particule fictive) :

$$\mu \frac{d\vec{v}}{dt} = \mu \left(\frac{d\vec{v}_2}{dt} - \frac{d\vec{v}_1}{dt} \right) = \mu \left(\frac{\overrightarrow{f_{1 \rightarrow 2}}}{m_2} - \frac{\overrightarrow{f_{2 \rightarrow 1}}}{m_1} \right) = \mu \left(\frac{\overrightarrow{f_{1 \rightarrow 2}}}{m_2} + \frac{\overrightarrow{f_{1 \rightarrow 2}}}{m_1} \right) = \frac{\mu}{\mu} \overrightarrow{f_{1 \rightarrow 2}}$$

11 Le mouvement de M a les propriétés générales suivantes :

☒ a. Il est à force centrale. ☐ b. Il est rectiligne.

☒ c. Il est plan. ☐ d. Il est elliptique.

Les quatre points G, M, M_1 et M_2 sont alignés puisque $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2}$. La force $\overrightarrow{f_{1 \rightarrow 2}}$ est aussi colinéaire à $\overrightarrow{M_1M_2}$ (seul type de forces d'interaction entre particules rencontrées), donc la force exercée sur M passe toujours par G : elle est centrale. On en déduit que le mouvement de M et donc de M_1 et M_2 a les propriétés des mouvements à force centrale : le moment cinétique se conserve ; le mouvement est plan.



Dans certains cas, le mouvement peut être rectiligne (moment cinétique nul au départ) ou elliptique (attraction gravitationnelle ou ressort), mais ce n'est pas une propriété générale.

- 12** Dans le cas d'une force du type $\overrightarrow{f_{i \rightarrow j}} = \frac{k}{(M_i M_j)^3} \overrightarrow{M_i M_j}$, montrer que l'on peut définir une énergie potentielle efficace E_{eff} pour l'étude du mouvement radial de M , où intervient la constante des aires $C = r^2 \dot{\theta}$, avec $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{GM}$ et $\dot{\theta}$ la vitesse angulaire de M dans la plan du mouvement. Établir son expression.

☐ a. $E_{eff} = -\frac{k}{r} + \frac{\mu C^2}{2r^2}$ ☒ b. $E_{eff} = \frac{k}{r} + \frac{\mu C^2}{2r^2}$

☐ c. $E_{eff} = \frac{k}{r} + \frac{C^2}{2r^2}$ ☐ d. $E_{eff} = \frac{\mu C^2}{2r^2}$

La force s'exerçant sur M est $\overrightarrow{f_{1 \rightarrow 2}} = \frac{k}{r^3} \overrightarrow{r}$, l'énergie potentielle est obtenue par :

$$\delta W_{int} = \frac{k}{r^3} \overrightarrow{r} \cdot d\overrightarrow{r} = -dE_P \Rightarrow dE_P = \frac{-k}{r^2} dr \Rightarrow E_P = \frac{k}{r} + cte$$

On prend en général la constante nulle de manière à avoir une énergie potentielle nulle à l'infini. On peut alors écrire l'énergie mécanique en utilisant les coordonnées polaires dans le plan du mouvement :

$$E_m^* = E_c^* + E_P = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{k}{r} = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu \frac{C^2}{r^2} + \frac{k}{r}$$

Le premier terme représente l'énergie cinétique radiale de M et les deux suivants forment l'énergie potentielle effective (ou efficace).

Partie 4

Thermodynamique

Température – Gaz parfait – Théorie cinétique

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

- La théorie cinétique des gaz parfaits.
- Les relations entre vitesse quadratique moyenne, pression et température.
- L'énergie cinétique d'un gaz parfait.
- La diffusion de particules entre deux enceintes par un petit trou.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication.

1 Généralités

- ☐ V ☐ F a. Lorsque la température passe de 20 °C à 40 °C elle est doublée.
- ☐ V ☐ F b. Plus la température est élevée, plus la vitesse quadratique moyenne est faible.
- ☐ V ☐ F c. Pour un gaz parfait, l'énergie interne est la somme de toutes les énergies cinétiques microscopiques.
- ☐ V ☐ F d. La capacité thermique à volume constant d'un gaz parfait dépend du nombre d'atomes des molécules.
- ☐ V ☐ F e. Pour une molécule diatomique, la capacité thermique à volume constant dépend de la température.

Consignes

QCM

Il peut y avoir, pour certaines questions, deux propositions exactes.

Notations. L'espace est repéré par le trièdre direct (O, x, y, z) . On considère le modèle simplifié suivant pour le gaz parfait :

- la norme de la vitesse de toutes les particules est égale à u (vitesse quadratique moyenne) ;
- les sens des vitesses se répartissent de manière équiprobable suivant les six sens de l'espace $(\vec{u}_x, -\vec{u}_x, \vec{u}_y, -\vec{u}_y, \vec{u}_z, -\vec{u}_z)$.

2 Une enceinte parallélépipédique contient un gaz parfait constitué de n particules de masse m par unité de volume. On s'intéresse à celles qui viennent frapper la paroi perpendiculaire à l'axe Ox en se déplaçant dans le sens des x croissants. Déterminer le nombre dN de ces particules venant frapper une surface dS de cette paroi pendant l'intervalle de temps dt ainsi que la variation de leur quantité de mouvement individuelle $\Delta \vec{p}$ si elles sont réfléchies selon Ox .

- ☐ a. $dN = \frac{1}{3} n u dS dt$ ☐ b. $dN = \frac{1}{6} n u dS dt$
☐ c. $\Delta \vec{p} = \vec{0}$ ☐ d. $\Delta \vec{p} = -2mu\vec{u}_x$

3 Déterminer la force $\vec{F}_{dS \rightarrow part}$ exercée par la surface dS sur les particules qui la frappent pendant dt . Par la loi d'action et de réaction, en déduire la pression exercée sur la paroi.

- ☐ a. $\vec{F}_{dS \rightarrow part} = -2mu^2\vec{u}_x$ ☐ b. $\vec{F}_{dS \rightarrow part} = -\frac{1}{3} nmu^2 dS dt \vec{u}_x$
☐ c. $P = \frac{1}{3} nmu^2$ ☐ d. $P = \frac{1}{3} nmu^2$

4 Connaissant l'expression de la pression P dans le gaz calculée précédemment, déterminer l'expression de la vitesse quadratique moyenne en fonction de la température :

- ☐ a. $u = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$ ☐ b. $u = \sqrt{\frac{3k_B T}{mV}}$
☐ c. $u = \sqrt{\frac{3RT}{mV}}$ ☐ d. $u = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$

- 5** Établir l'expression de l'énergie interne pour un gaz parfait monoatomique. On note n_n le nombre de moles et N le nombre total de particules.

☐ a. $U = \frac{3}{2}n_nRT$ ☐ b. $U = \frac{3}{2}Nk_BT$

☐ c. $U = \frac{3}{2}k_BT$ ☐ d. $U = \frac{9}{2}Nk_BT$

- 6** Une enceinte est séparée en deux volumes V identiques, notés (1) et (2) par une paroi perpendiculaire à l'axe Ox , percée d'un petit trou de section s . On suppose que l'axe Ox est orienté de l'enceinte (1) vers l'enceinte (2). Les enceintes contiennent respectivement N_1 et N_2 particules. Déterminer le nombre de particules $dN_{1 \rightarrow 2}$ qui traversent le trou de (1) à (2) pendant l'intervalle de temps dt .

☐ a. $dN_{1 \rightarrow 2} = \frac{N_1}{V} s u dt$ ☐ b. $dN_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{3} \frac{N_1}{V} s u dt$

☐ c. $dN_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{6} N_1 s u dt$ ☐ d. $dN_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{6} \frac{N_1}{V} s u dt$

- 7** Déterminer pour l'enceinte précédente le nombre de particules $dN_{2 \rightarrow 1}$ qui traversent le trou de (2) à (1) pendant l'intervalle de temps dt .

☐ a. $dN_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{6} \frac{N_1}{V} s u dt$ ☐ b. $dN_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{6} \frac{N_2}{V} s u dt$

☐ c. $dN_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{6} \frac{N_1 - N_2}{V} s u dt$ ☐ d. $dN_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{3} \frac{N_2}{V} s u dt$

- 8** On note N le nombre total de particules présentes dans les deux enceintes. Déterminer une équation différentielle vérifiée par N_1 :

☐ a. $\frac{dN_1}{dt} + \frac{su}{3V} N_1 = \frac{su}{6V} N$ ☐ b. $\frac{dN_1}{dt} + \frac{su}{6V} N_1 = \frac{su}{6V} N$

☐ c. $\frac{dN_1}{dt} + \frac{su}{6V} N_1 = 0$ ☐ d. $\frac{dN_1}{dt} + \frac{su}{3V} N_1 = \frac{su}{3V} N$

- 9** Initialement toutes les particules sont du côté (1). Exprimer N_1 en fonction du temps.

☐ a. $N_1 = N \exp\left(-\frac{sut}{3V}\right)$ ☐ b. $N_1 = \frac{N}{2} \left(1 - \exp\left(-\frac{sut}{3V}\right)\right)$

☐ c. $N_1 = \frac{N}{2} \left(1 + \exp\left(-\frac{sut}{3V}\right)\right)$ ☐ d. $N_1 = N \left(1 - \exp\left(-\frac{sut}{3V}\right)\right)$

Voir corrigés page 242

Pression – Statique des fluides

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

- La résolution de l'équation de la statique des fluides pour un gaz ou pour un liquide incompressible.
- Les vases communicants.
- La poussée d'Archimède et les forces de pression s'exerçant sur un solide immergé.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication.

1 Généralités

- ☐ V ☐ F a. La pression est uniforme dans un fluide dense comme l'eau.
- ☐ V ☐ F b. La pression au sommet de l'Éverest (environ 8 000 m) est environ 1/3 de la pression au niveau de la mer.
- ☐ V ☐ F c. À environ 10 m de profondeur sous l'eau, la pression atmosphérique est doublée.

Consignes

QCM

Il peut y avoir, pour certaines questions, deux propositions exactes.

- 2** On considère un gaz parfait, à température constante T , de masse volumique ρ , de masse molaire M , dans un champ de pesanteur d'accélération $\vec{g}$ uniforme selon l'axe Oz vertical ascendant. La pression P du gaz vérifie :

☐ a. $\frac{dP}{dz} = -\rho g$ ☐ b. $P = \frac{\rho RT}{M}$

☐ c. $\frac{dP}{dz} = \rho g$ ☐ d. $P = \rho RT$

- 3** On note P_0 , la pression à l'altitude $z = 0$. L'expression de la pression en fonction de z est :

☐ a. $P = P_0 - \rho g z$ ☐ b. $P = P_0 + \rho g z$

☐ c. $P = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)$ ☐ d. $P = P_0 \exp\left(\frac{Mgz}{RT}\right)$

- 4** On note ρ_0 la masse volumique à $z = 0$. On prend maintenant un modèle plus réaliste, pour lequel $T = az + T_0$. La pression et la masse volumique en fonction de l'altitude sont :

☐ a. $P = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{R(az + T_0)}\right)$ ☐ b. $P = P_0 \left(\frac{T_0}{az + T_0}\right)^{\frac{Mg}{aR}}$

☐ c. $\rho = \rho_0 \frac{T_0}{az + T_0} \exp\left(-\frac{Mgz}{R(az + T_0)}\right)$ ☐ d. $\rho = \rho_0 \left(\frac{T_0}{az + T_0}\right)^{\frac{Mg}{aR} + 1}$

- 5** On modélise une étoile par une boule de gaz de masse volumique constante ρ , de rayon a . La gravité à une distance r du centre est alors $\vec{g} = -\frac{4}{3}G\pi\rho r\vec{u}_r$.

L'équation d'équilibre s'écrit en coordonnées sphériques $\frac{dP}{dr} = \rho\vec{g}$. On considère que la pression en $r = a$ est nulle (vide). La pression au centre de l'étoile est :

☐ a. $P = \frac{2}{3}G\pi\rho^2 a^2$ ☐ b. $P = \frac{4}{3}G\pi\rho^2 a^2$

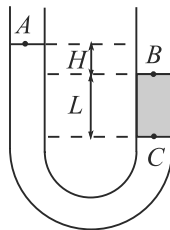
☐ c. $P = 0$ ☐ d. $P = -\frac{2}{3}G\pi\rho^2 a^2$

- 6** On s'intéresse à un liquide incompressible, à température constante T , de masse volumique ρ , masse molaire M , dans un champ de pesanteur d'accélération $\vec{g}$ uniforme selon l'axe Oz vertical ascendant. Le liquide est situé dans le demi-espace $z < 0$ et au-dessus lui ($z > 0$), l'atmosphère a une pression P_0 . La pression P du liquide est :

☐ a. $P = P_0 - \rho g z$ ☐ b. $P = P_0 + \rho g z$

☐ c. $P = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)$ ☐ d. $P = P_0 \exp\left(\frac{Mgz}{RT}\right)$

- 7 On étudie l'équilibre de deux liquides dans un tube en U. Le liquide blanc sur la figure a une masse volumique ρ_1 et le liquide coloré, une masse volumique $\rho_2 > \rho_1$. La pression atmosphérique au-dessus des liquides est P_0 . Quelle est la pression au point C ?



- ☐ a. $P_C = \rho_2 g L$ ☐ b. $P_C = P_0 + \rho_1 g (H + L)$
☐ c. $P_C = P_0 + \rho_2 g L$ ☐ d. $P_C = P_0 + \rho_2 g (H + L)$

- 8 Sur le cas précédent, on suppose maintenant que le tube de gauche a une section s et le tube de droite une section S . Déterminer la hauteur h dont est descendu le point A et la force F qu'il faut appliquer en A pour avoir A et B à la même hauteur :

- ☐ a. $h = H / \left(1 + \frac{s}{S}\right)$ ☐ b. $h = \frac{H}{2}$
☐ c. $F = sgL(\rho_2 - \rho_1)$ ☐ d. $F = sp_1 gh$

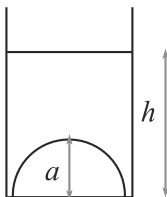
- 9 Un cube de volume V et de masse volumique ρ flotte à l'interface de deux liquides non miscibles de masses volumiques ρ_1 et ρ_2 avec $\rho_2 > \rho_1$. Déterminer le volume V_1 de la partie du cube dans le liquide (1) :

- ☐ a. $V_1 = V \frac{\rho_1}{\rho_2}$ ☐ b. $V_1 = V \frac{\rho - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}$
☐ c. $V_1 = V \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}$ ☐ d. $V_1 = \frac{\rho}{\rho_1} V$

- 10 On reprend l'expérience précédente. On définit l'axe Oz ascendant passant par le centre du cube, l'origine O étant sur la ligne de flottaison à l'équilibre. On note C le point du cube coïncidant avec O à l'équilibre. On appuie légèrement sur le cube, de manière à ce que C descende d'une petite hauteur h_0 sous O et on lâche sans vitesse initiale. On note a la longueur du côté du cube. Déterminer la pulsation ω des petites oscillations et l'équation donnant la position de C au cours du temps.

- ☐ a. $z_C = -h_0 \cos \omega t$ ☐ b. $z_C = h_0 \cos \omega t$
☐ c. $\omega = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho} \frac{g}{a}$ ☐ d. $\omega = \sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho} \frac{g}{a}}$

- 11** Une demi-sphère de rayon a est posée au fond d'un récipient rempli d'eau de masse volumique ρ_e . Déterminer la force $\vec{F}$ exercée sur cette demi-sphère par l'eau. La pression atmosphérique est P_0 . On prendra l'axe Oz vers le haut.



- ☐ a. $\vec{F} = P_0 2\pi a^2 \vec{u}_z$
☐ b. $\vec{F} = \frac{2}{3} \rho_e \pi a^3 g \vec{u}_z$
☐ c. $\vec{F} = \frac{2}{3} \pi a^3 \rho_e g - \pi a^2 (P_0 + \rho_e g h) \vec{u}_z$
☐ d. $\vec{F} = (P_0 + \rho_e g (h - a)) 2\pi a^2 \vec{u}_z$

Voir corrigés page [246](#)

Premier principe de la thermodynamique

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

- L'étude de l'évolution d'un système lors de transformations adiabatiques, isothermes, isochores ou isobares.
- Les calculs de variations d'énergie interne et d'enthalpie.
- L'évaluation des échanges thermiques : transferts thermiques.
- L'évaluation du travail échangé : forces de pression, travail électrique...
- La détermination de l'état final d'un système.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication.

1 Généralités

- ☐ V ☐ F a. Le transfert thermique reçu par un système ne dépend que de l'état initial et de l'état final.
- ☐ V ☐ F b. Le travail est une fonction d'état.
- ☐ V ☐ F c. La variation d'énergie interne d'un système ne dépend que de l'état initial et de l'état final.
- ☐ V ☐ F d. Dans une transformation isotherme $Q = 0$.
- ☐ V ☐ F e. Le travail élémentaire des forces de pression est $\delta W = -PdV$ où P est la pression du gaz seulement si la transformation est quasi statique.
- ☐ V ☐ F f. Le premier principe peut s'écrire $\Delta U = \Delta W + \Delta Q$.

Consignes

QCM

Il peut y avoir, pour certaines questions, deux propositions exactes.

2 Une mole de gaz parfait dans l'état initial (P_1, V_1, T_1) subit une détente isotherme quasi statique jusqu'à la pression $P_1/2$. Le travail et la chaleur reçus sont :

- ☐ a. $W = -RT \ln 2$ ☐ b. $W = RT \ln 2$ ☐ c. $Q = 0$ ☐ d. $Q = RT \ln 2$

3 Une mole de gaz parfait dans l'état initial (P_1, V_1, T_1) subit une détente adiabatique quasi statique jusqu'à la pression $P_1/2$. La variation d'énergie interne et le travail reçu sont :

- ☐ a. $\Delta U = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left(2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right)$ ☐ b. $\Delta U = \frac{RT_1}{\gamma - 1}$
☐ c. $W = -Q$ ☐ d. $W = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left(2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right)$

4 Une mole de gaz parfait dans l'état initial (P_1, V_1, T_1) subit une compression isochore quasi statique jusqu'à la pression $2P_1$. Les variations d'énergie interne et d'enthalpie vérifient :

- ☐ a. $\Delta U = Q$ ☐ b. $\Delta U = \frac{RT_1}{\gamma - 1}$ ☐ c. $\Delta H = W$ ☐ d. $\Delta H = Q$

5 Pour la transformation précédente, le travail et la chaleur échangés sont :

- ☐ a. $Q = \frac{\gamma RT_1}{\gamma - 1}$ ☐ b. $Q = 0$ ☐ c. $W = 0$ ☐ d. $W = \frac{RT_1}{\gamma - 1}$

6 Une mole de gaz parfait dans l'état initial (P_1, V_1, T_1) subit une transformation isobare quasi statique jusqu'au volume $2V_1$. Les variations d'énergie interne et d'enthalpie vérifient :

- ☐ a. $\Delta U = W$ ☐ b. $\Delta U = Q$ ☐ c. $\Delta H = Q$ ☐ d. $\Delta H = W$

7 Pour la transformation précédente, le travail et la chaleur échangés sont :

- ☐ a. $W = P_1 V_1$ ☐ b. $W = -P_1 V_1$
☐ c. $Q = \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_1 V_1$ ☐ d. $Q = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1}$

On considère une enceinte de parois extérieures adiabatiques et indéformables, séparée en deux par une cloison mobile adiabatique. Le compartiment de gauche (1) contient n_1 moles d'un gaz parfait dans les conditions initiales (P_1, V_1, T_1) . Le compartiment de droite (2) contient le même gaz parfait dans les conditions initiales $(2P_1, V_1, T_1)$. On libère la cloison amovible. On indice par f_1 et f_2 les grandeurs finales respectives des compartiments (1) et (2).

8 La variation de l'énergie interne du système global vérifie :

☐ a. $\Delta U = 0$

☐ b. $\Delta U = P_1 V_1$

☐ c. $\Delta U = \frac{n_1 R}{\gamma - 1} (2T_{f2} + T_{f1} - 3T_1)$

☐ d. $\Delta U = \frac{n_1 R}{\gamma - 1} (T_{f2} + T_{f1} - 2T_1)$

9 Parmi les propositions suivantes, cochez celles qui sont vraies :

☐ a. $T_{f1} = T_{f2}$

☐ b. $P_{f1} = P_{f2}$

☐ c. $V_{f1} = V_{f2}$

☐ d. $V_{f1} + V_{f2} = 2V_1$

10 Déterminer une relation entre les températures finales, et en déduire la pression dans le compartiment (1).

☐ a. $2T_{f2} + T_{f1} - 3T_1 = 0$

☐ b. $2T_{f2} + T_{f1} - T_1 = 0$

☐ c. $P_{f1} = P_{f2} = \frac{3}{1 + 2^{1/\gamma}} P_1$

☐ d. $P_{f1} = P_{f2} = \frac{3}{2} P_1$

11 On considère une enceinte adiabatique indéformable séparée initialement en deux compartiments de volume V_0 , l'un contenant une mole de gaz parfait, l'autre étant vide.

P_0			
T_0			
	gaz	cloison amovible	vide

Le compartiment de gauche est séparé de l'atmosphère (P_0, T_0) par un piston diatherme. On enlève la cloison amovible. Déterminer l'état final du gaz :

☐ a. $(P_0, T_0, 2V_0)$

☐ b. $\left(\frac{P_0}{2}, T_0, V_0\right)$

☐ c. (P_0, T_0, V_0)

☐ d. $\left(\frac{P_0}{2}, T_0, \frac{V_0}{2}\right)$

12 Déterminer le travail et le transfert thermique reçus par le gaz de la question 11.

☐ a. $W = P_0 V_0$

☐ b. $W = 0$

☐ c. $Q = 0$

☐ d. $Q = -P_0 V_0$

13 On souhaite chauffer une masse M d'eau de capacité massique C de la température T_1 à la température T_2 en une durée Δt avec un résistor de résistance R (de capacité thermique négligeable). Déterminer l'intensité du courant nécessaire à l'opération.

☐ a. $I = \sqrt{\frac{MCT_2}{R\Delta t}}$

☐ b. $I = \sqrt{\frac{MC(T_2 - T_1)}{R}}$

☐ c. $I = \sqrt{\frac{MC(T_2 - T_1)}{R\Delta t}}$

☐ d. $I = \sqrt{\frac{MC(T_1 - T_2)}{R\Delta t}}$

Un résistor (résistance R , capacité thermique C_r) initialement à la température T_0 , est dans un milieu de température constante T_e . Le résistor est soumis à une tension E constante. D'autre part, il perd par unité de temps une quantité de chaleur $aC_r(T - T_e)$.

- 14** Quels sont le travail électrique et la chaleur reçus par le résistor dans l'intervalle de temps dt ?

☐ a. $\delta W_{el} = \frac{E^2}{R} dt$

☐ b. $\delta W_{el} = -\frac{E^2}{R} dt$

☐ c. $\delta Q = aC_r(T - T_e)dt$

☐ d. $\delta Q = -aC_r(T - T_e)dt$

- 15** Établir à partir du premier principe, l'équation différentielle pour la température du résistor et son expression générale en fonction du temps :

☐ a. $\frac{dT}{dt} - aT = \frac{E^2}{RC_r} - aT_e$

☐ b. $\frac{dT}{dt} + aT = \frac{E^2}{RC_r} + aT_e$

☐ c. $T = T_0 e^{-at} + \left(\frac{E^2}{aRC_r} + T_e \right) (1 - e^{-at})$

☐ d. $T = T_0 e^{at} + \left(-\frac{E^2}{aRC_r} + T_e \right) (1 - e^{at})$

- 16** Quelle est la température limite T_{lim} du résistor et quelle est alors la puissance P fournie par le générateur pour maintenir le milieu à T_e ?

☐ a. $T_{lim} = T_e$

☐ b. $T_{lim} = \frac{E^2}{aRC_r} + T_e$

☐ c. $P = \frac{E^2}{R}$

☐ d. $P = \frac{E^2}{R} + aC_r T_e$

Voir corrigés page [250](#)

Second principe de la thermodynamique

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

- Les transferts thermiques (révision premier principe).
- La variation d'entropie d'un corps au cours d'une transformation.
- L'entropie échangée au cours d'une transformation.
- L'entropie créée au cours d'une transformation.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication.

1 Généralités :

- ☐ V ☐ F a. L'entropie échangée est toujours positive.
- ☐ V ☐ F b. L'entropie créée est positive ou nulle.
- ☐ V ☐ F c. Lors d'une transformation isotherme, l'entropie échangée est nulle.
- ☐ V ☐ F d. La variation d'entropie d'un système ne dépend que de l'état initial et de l'état final.
- ☐ V ☐ F e. L'entropie créée ne dépend que de l'état initial et de l'état final.
- ☐ V ☐ F f. Une transformation adiabatique est telle que $\Delta S = 0$.
- ☐ V ☐ F g. Une transformation telle que $\Delta S = 0$ est réversible.

Consignes

QCM

Il peut y avoir, pour certaines questions, deux propositions exactes.

Une enceinte indéformable isolée de l'extérieur par des parois adiabatiques est divisée en deux compartiments de même volume. Les deux compartiments, de même volume, sont séparés par une paroi diatherme (qui laisse passer la chaleur) fixe. Chaque compartiment contient initialement deux gaz parfaits identiques $(2n, T, P_1, V)$ et $(n, 2T, P_2, V)$. On laisse l'équilibre s'établir.

2 La variation d'entropie du premier gaz est :

☐ a. $\Delta S_1 = \frac{2nR}{\gamma-1} \ln \frac{3}{2}$ ☐ b. $\Delta S_1 = \frac{4nR}{\gamma-1}$

☐ c. $\Delta S_1 = \frac{2nR}{\gamma-1} \ln \frac{4}{3}$ ☐ d. $\Delta S_1 = 0$

3 La variation d'entropie de l'ensemble des deux gaz est :

☐ a. $\Delta S = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{32}{27}$

☐ b. $\Delta S = 0$

☐ c. $\Delta S = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{27}{8}$

☐ d. On ne peut pas calculer ΔS car il y a deux gaz distincts.

4 Pour l'ensemble des deux gaz, l'entropie échangée avec l'extérieur et l'entropie créée sont :

☐ a. $S^e = 0$ ☐ b. $S^e = \frac{3nR}{\gamma-1}$

☐ c. $S^c = 0$ ☐ d. $S^c = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{32}{27}$

Un corps solide de capacité thermique C à la température T_1 est mis en contact avec un thermostat à la température T_2 . Il n'y a pas d'échange de chaleur ni de travail avec l'extérieur. On attend l'équilibre.

5 La chaleur Q reçue par le corps est :

☐ a. $Q = 0$ ☐ b. $Q = C(T_2 - T_1)$

☐ c. $Q = C(T_1 - T_2)$ ☐ d. $Q = C(T_2 + T_1)/2$

23 Second principe de la thermodynamique

6 L'entropie échangée par le corps est :

☐ a. $S^e = C \frac{T_2 - T_1}{T_2}$ ☐ b. $S^e = C \frac{T_2 - T_1}{T_1}$

☐ c. $S^e = C \ln \frac{T_2}{T_1}$ ☐ d. $S^e = C \frac{T_2}{T_1}$

7 La variation d'entropie du corps est :

☐ a. $\Delta S = 0$ ☐ b. $\Delta S = C \frac{T_2 - T_1}{T_1}$

☐ c. $\Delta S = C \ln \frac{T_2}{T_1}$ ☐ d. $\Delta S = C \frac{T_2}{T_1}$

8 On note S^c l'entropie créée. On a donc :

☐ a. $S^c = 0$ ☐ b. $S^c = C \ln \frac{T_2}{T_1} - C \frac{T_2 - T_1}{T_2}$

☐ c. La transformation est réversible ☐ d. La transformation est irréversible

Un gaz parfait dans l'état initial (P_1, V_1, T_1) est en contact avec un thermostat à la même température. Il subit une compression isotherme réversible jusqu'à la pression $2P_1$.

9 La variation d'entropie du gaz est :

☐ a. $\Delta S = 0$ ☐ b. $\Delta S = -\frac{\gamma P_1 V_1}{(\gamma - 1)T_1} \ln 2$

☐ c. $\Delta S = -\frac{P_1 V_1}{T_1} \ln 2$ ☐ d. $\Delta S = \frac{P_1 V_1}{T_1} \ln 2$

10 L'entropie échangée par le gaz et l'entropie créée sont :

☐ a. $S^e = 0$ ☐ b. $S^e = -\frac{P_1 V_1}{T_1} \ln 2$

☐ c. $S^c = 0$ ☐ d. $S^c = -\frac{P_1 V_1}{T_1} \ln 2$

Le même gaz dans l'état initial (P_1, V_1, T_1) est maintenant dans un cylindre fermé par un piston. À l'exception du piston les autres parois sont immobiles. Le piston assure l'équilibre mécanique avec l'extérieur à la pression P_1 . Le seul échange de chaleur a lieu avec le thermostat à température T_1 . On fait brusquement passer la pression extérieure à $2P_1$ et on attend l'équilibre du gaz.

11 Le travail et le transfert thermique reçus par le gaz sont :

- ☐ a. $W = P_1 V_1$ ☐ b. $W = P_1 V_1 \ln 2$
☐ c. $Q = -P_1 V_1 \ln 2$ ☐ d. $Q = -P_1 V_1$

12 La variation d'entropie du gaz est :

- ☐ a. $\Delta S = 0$ ☐ b. $\Delta S = -\frac{\gamma P_1 V_1}{(\gamma - 1)T_1} \ln 2$
☐ c. $\Delta S = -\frac{P_1 V_1}{T_1} \ln 2$ ☐ d. $\Delta S = -\frac{P_1 V_1}{T_1}$

13 L'entropie échangée par le gaz et l'entropie créée sont :

- ☐ a. $S^e = -\frac{P_1 V_1}{T_1}$ ☐ b. $\Delta S = -\frac{P_1 V_1}{T_1} \ln 2$
☐ c. $S^c = \frac{P_1 V_1}{T_1}$ ☐ d. $S^c = \frac{P_1 V_1}{T_1} (1 - \ln 2)$

Un résistor de résistance R et de volume V est parcouru par une intensité continue I et soumis à une tension continue E pendant Δt . Sa température est maintenue constante par contact avec un thermostat à T et sa capacité thermique est C . La pression extérieure est P .

14 L'entropie échangée avec le thermostat est :

- ☐ a. $S^e = \frac{EI\Delta t}{T}$ ☐ b. $S^e = 0$
☐ c. $S^e = -\frac{EI\Delta t}{T}$ ☐ d. $S^e = C \frac{\Delta t}{T}$

15 La variation d'entropie du résistor est :

- ☐ a. $\Delta S = 0$ ☐ b. $\Delta S = -\frac{EI\Delta t}{T}$
☐ c. $\Delta S = \frac{EI\Delta t}{T}$ ☐ d. $\Delta S = \frac{PV}{(\gamma - 1)T} \ln PV^\gamma$

16 L'entropie créée est :

- ☐ a. $S^c = 0$ ☐ b. $S^c = -S^e$
☐ c. $S^c = \frac{EI\Delta t}{T}$ ☐ d. $S^c = -\frac{EI\Delta t}{T}$

Voir corrigés page [257](#)

Changements d'état

24

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

- Les équilibres diphasés, en particulier l'équilibre liquide-vapeur.
- L'expression des fonctions d'états pour un mélange liquide-vapeur (MPSI).
- Les variations d'entropie, d'enthalpie et d'énergie interne pour une vaporisation ou une condensation (MPSI).

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication.

1 Généralités

- ☐ V ☐ F a. Un changement d'état ne peut avoir lieu qu'à pression et température constantes.
- ☐ V ☐ F b. Un changement d'état à pression et température constante est réversible.
- ☐ V ☐ F c. Le point triple de l'eau est à 0,01 °C.
- ☐ V ☐ F d. Sous pression atmosphérique normale l'eau peut bouillir à 200 °C.
- ☐ V ☐ F e. L'eau peut s'évaporer en dessous de 100 °C.
- ☐ V ☐ F f. En montagne, l'eau bout à plus basse température qu'au niveau de la mer.

Consignes

QCM

Il peut y avoir, pour certaines questions, deux propositions exactes.

Les questions 4, 5, 6, 7 et 10 ne sont pas au programme de PTSI.

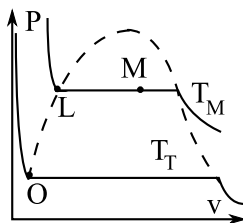
2 Un calorimètre dont on négligera la valeur en eau, contient $m_l = 100$ g d'eau liquide à 20°C . On ajoute une masse $m_g = 30$ g de glace à 0°C . Quel est l'état final sachant qu'on opère à pression atmosphérique normale ? On donne les capacités massiques de l'eau liquide $c_l = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, de la glace $c_g = 2,1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et l'enthalpie de fusion à 0°C $L_f = 333 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

- ☐ a. Tout est liquide à 270 K . ☐ b. Il y a équilibre à 273 K .
☐ c. Tout est solide à 349 K . ☐ d. La masse de glace fondue est $25,2 \text{ g}$.

3 On considère une enceinte indéformable, initialement vide, de volume 1 L , maintenue à 325 K . On met dans cette enceinte 1 g d'eau. La pression de vapeur saturante à cette température est $0,133 \text{ bar}$. On considérera la vapeur comme un gaz parfait. Constante des gaz parfait : $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$. Masse molaire de l'eau $M = 18 \text{ g}$. Quel est l'état final ?

- ☐ a. Tout est vaporisé à $1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.
☐ b. Tout est liquide.
☐ c. $8,9 \cdot 10^{-2} \text{ g}$ de gaz et $0,91 \text{ g}$ de liquide.
☐ d. $4,9 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$ de gaz et $5 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$ de liquide

4 On donne la courbe de saturation pour un mélange liquide-vapeur avec deux isothermes l'une à la température triple T_T , l'autre à une température T_M . On note L_v l'enthalpie massique de vaporisation à la température T_M et C_l la capacité thermique massique du liquide seul. On considère une masse totale m .



On note H_0 l'enthalpie au point O . Déterminer l'enthalpie au point M de titre massique en vapeur x_v .

- ☐ a. $H = H_0 + m(C_l(T_M - T_T) + x_v L_v)$ ☐ b. $H = H_0 + m(C_l(T_M - T_T) + L_v)$
☐ c. $H = H_0 + m L_v$ ☐ d. $H = H_0 + m x_v L_v$

- 5 Avec les mêmes hypothèses que la question précédente, déterminer l'entropie S en M . On note S_O l'entropie en O .

$$\begin{aligned} \square \text{ a. } S &= S_O + m \left(C_l \ln \frac{T_M}{T_T} + \frac{L_v}{T_M} \right) & \square \text{ b. } S &= S_O + m \left(C_l \frac{T_M - T_T}{T_M} + \frac{x_v L_v}{T_M} \right) \\ \square \text{ c. } S &= S_O + m \left(C_l \ln \frac{T_M}{T_T} + \frac{x_v L_v}{T_M} \right) & \square \text{ d. } S &= S_O + m \frac{x_v L_v}{T_M} \end{aligned}$$

- 6 On considère une masse m d'un corps en équilibre liquide-vapeur (fraction massique x_v de vapeur) à la température T_1 . Ce corps subit une détente isenthalpique jusqu'à la température T_0 . Déterminer la fraction de vapeur x'_v dans l'état final. On note C_l la capacité thermique massique du liquide seul et l'enthalpie massique de vaporisation est $L_v = A - BT$ où A et B sont des constantes.

$$\begin{aligned} \square \text{ a. } x'_v &= \frac{-x_v(A - BT_1) + C_l(T_1 - T_0)}{A - BT_0} & \square \text{ b. } x'_v &= x_v \frac{A - BT_1}{A - BT_0} \\ \square \text{ c. } x'_v &= x_v & \square \text{ d. } x'_v &= \frac{x_v(A - BT_1) + C_l(T_1 - T_0)}{A - BT_0} \end{aligned}$$

- 7 Une masse m de vapeur juste saturante à la température T est transformée en un mélange liquide-vapeur, de fraction massique en liquide x_l , à la même température. Déterminer la variation d'énergie interne de ce système. On note v_l et v_v respectivement les volumes massiques du liquide et du gaz saturants seuls, P_s la pression de vapeur saturante à T et L_v l'enthalpie massique de vaporisation à cette même température.

$$\begin{aligned} \square \text{ a. } \Delta U &= -m(x_l L_v + P_s x_l (v_l - v_v)) & \square \text{ b. } \Delta U &= -m x_l L_v \\ \square \text{ c. } \Delta U &= -m(L_v + P_s (v_l - v_v)) & \square \text{ d. } \Delta U &= -P_s x_l (v_l - v_v) \end{aligned}$$

- 8 Une enceinte indéformable est contact avec un thermostat à température T . Dans cette enceinte initialement vide, on injecte une masse m de liquide juste saturant. Le volume de l'enceinte est juste suffisant pour que la vaporisation soit complète. On note v_l et v_v respectivement les volumes massiques du liquide et du gaz saturants seuls, P_s la pression de vapeur saturante à T et L_v l'enthalpie massique de vaporisation à cette même température. Déterminer la chaleur reçue par m .

$$\begin{aligned} \square \text{ a. } Q &= mL_v & \square \text{ b. } Q &= -mL_v - mP_s(v_l - v_v) \\ \square \text{ c. } Q &= mL_v + mP_s(v_l - v_v) & \square \text{ d. } Q &= 0 \end{aligned}$$

- 9 Sur le cas précédent, déterminer l'entropie échangée S^e et l'entropie créée S^c .

$$\begin{aligned} \square \text{ a. } S^e &= \frac{mL_v}{T} & \square \text{ b. } S^e &= \frac{m(L_v + P_s(v_l - v_v))}{T} \\ \square \text{ c. } S^c &= 0 & \square \text{ d. } S^c &= \frac{mP_s(v_v - v_l)}{T} \end{aligned}$$

- 10** Une masse m de vapeur juste saturante à la température T_1 subit une détente adiabatique réversible dans une turbine jusqu'à la température T_2 . Déterminer la fraction massique x_{v2} de vapeur dans l'état final. On note L_{v1} et L_{v2} les enthalpies massiques de vaporisation aux températures T_1 et T_2 , et c_l la capacité thermique massique du liquide seul.

$$\begin{array}{ll} \square \text{ a. } x_{v2} = \frac{T_2}{L_{v2}} \left(\frac{L_{v1}}{T_1} - c_l \ln \frac{T_2}{T_1} \right) & \square \text{ b. } x_{v2} = \frac{T_2}{T_1} \frac{L_{v1}}{L_{v2}} \\ \square \text{ c. } x_{v2} = \frac{T_2}{L_{v2}} \left(\frac{L_{v1}}{T_1} - c_l \frac{T_2 - T_1}{T_1} \right) & \square \text{ d. } x_{v2} = \frac{T_2}{L_{v2}} \left(\frac{L_{v1}}{T_1} - c_l \frac{T_2 - T_1}{T_2} \right) \end{array}$$

- 11** Une masse m d'eau liquide juste saturante est dans une enceinte adiabatique fermée par un piston en contact avec l'atmosphère à pression P_0 . On suppose qu'il n'y a aucune vapeur dans l'état initial. On chauffe l'eau avec une résistance R parcourue par une intensité I et on néglige la dilatation de l'eau liquide. Déterminer le temps Δt nécessaire à la vaporisation complète et le travail W reçu par l'eau. On note v_l et v_v respectivement les volumes massiques du liquide et du gaz saturants seuls, L_v l'enthalpie massique de vaporisation.

$$\begin{array}{ll} \square \text{ a. } \Delta t = \frac{mP_0(v_v - v_l)}{RI^2} & \square \text{ b. } \Delta t = \frac{mL_v}{RI^2} \\ \square \text{ c. } W = -mP_0(v_v - v_l) & \square \text{ d. } W = mP_0(v_v - v_l) \end{array}$$

Voir corrigés page [263](#)

Machines thermiques

25

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

- Les généralités sur les machines monothermes ou dithermes.
- Le théorème de Carnot.
- Les grands types de machines : moteurs, pompes à chaleur, machines frigorifiques.
- L'utilisation des changements d'état dans les machines.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication.

Consignes

Toutes les machines étudiées fonctionnent de manière cyclique.

1 Généralités

- ☐ V ☐ F **a.** Une machine monotherme ne peut pas produire de travail.
- ☐ V ☐ F **b.** Une installation de chauffage est forcément une machine au moins ditherme.
- ☐ V ☐ F **c.** Dans une machine frigorifique, le fluide caloporteur est en contact avec la source froide lors de l'évaporation.
- ☐ V ☐ F **d.** Pour une pompe à chaleur le système cède de la chaleur à la source froide.

Consignes

QCM

Il peut y avoir, pour certaines questions, deux propositions exactes.

Les questions 11, 12, 13, 14 et 15 ne sont pas au programme de PTSI et constituent un approfondissement pour les MPSI.

- 2** Un système (S) est en contact avec un thermostat à la température T_1 et fonctionne selon des cycles. Quelles sont les relations vérifiées par le travail W reçu par (S) ;

☐ a. $W \geq 0$ ☐ b. $W = -Q$

☐ c. $W < 0$ ☐ d. $W = 0$

- 3** Un moteur ditherme est en contact avec une source froide à température T_f dont il reçoit la chaleur Q_f et une source chaude à température T_C dont il reçoit la chaleur Q_C . Il reçoit un travail W . Déterminer les réponses justes parmi les propositions suivantes :

☐ a. $W \geq 0$ ☐ b. $Q_C > 0$

☐ c. $Q_F < 0$ ☐ d. $Q_C < 0$

- 4** Une machine frigorifique ditherme est en contact avec une source froide à température T_f dont elle reçoit la chaleur Q_f et une source chaude à température T_C dont elle reçoit la chaleur Q_C . Elle reçoit un travail W . Déterminer les réponses justes parmi les propositions suivantes :

☐ a. $W < 0$ ☐ b. $W > 0$

☐ c. $Q_f < 0$ ☐ d. $Q_C < 0$

- 5** Une machine frigorifique ditherme fonctionnant selon des cycles est en contact avec une source froide à température T_f dont elle reçoit la chaleur Q_f et une source chaude à température T_C dont elle reçoit la chaleur Q_C . Elle reçoit un travail W . On note η son efficacité. Déterminer les réponses justes parmi les propositions suivantes :

☐ a. $\eta = \left(1 + \frac{Q_f}{Q_C}\right)^{-1}$ ☐ b. $\eta = -\left(1 + \frac{Q_C}{Q_f}\right)^{-1}$

☐ c. $\eta = -\left(1 + \frac{Q_C}{Q_f}\right)$ ☐ d. $\eta = \left(1 + \frac{Q_f}{Q_C}\right)$

- 6 Pour une pompe à chaleur ditherme, fonctionnant selon des cycles entre une source chaude à T_C et une source froide à T_f , l'efficacité vérifie :

$$\square \text{ a. } \eta \leq 1 - \frac{T_f}{T_C} \quad \square \text{ b. } \eta \leq \frac{T_f}{T_C - T_f}$$

$$\square \text{ c. } \eta \leq \frac{T_C}{T_f} - 1 \quad \square \text{ d. } \eta \leq \frac{T_C}{T_C - T_f}$$

- 7 On considère un moteur ditherme, fonctionnant selon des cycles entre une source chaude à T_C et une source froide à T_f . On note S^c , l'entropie créée. Le rendement vérifie :

$$\square \text{ a. } \eta = 1 - \frac{T_f}{T_C} + S^c \frac{T_f}{Q_C} \quad \square \text{ b. } \eta = 1 - \frac{T_f}{T_C}$$

$$\square \text{ c. } \eta = 1 - \frac{Q_f}{Q_C} - S^c \frac{T_f}{Q_C} \quad \square \text{ d. } \eta = 1 - \frac{T_f}{T_C} - S^c \frac{T_f}{Q_C}$$

- 8 Une pompe à chaleur ditherme fonctionne suivant des cycles, entre une source froide à température constante T_1 et une source chaude de capacité thermique C dont la température T_2 varie de T_{2i} à T_{2f} . Déterminer le travail minimum à fournir à la pompe.

$$\square \text{ a. } W_{\min} = -C(T_{2f} - T_{2i}) + CT_1 \ln \frac{T_{2f}}{T_{2i}} \quad \square \text{ b. } W_{\min} = Q_2 \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right)$$

$$\square \text{ c. } W_{\min} = C(T_{2f} - T_{2i}) - CT_1 \ln \frac{T_{2f}}{T_{2i}} \quad \square \text{ d. } W_{\min} = C(T_{2f} - T_{2i}) \left(1 - \frac{T_1}{T_2} \right)$$

- 9 Un moteur fonctionne suivant des cycles entre deux sources de capacités C , la source froide (1) a une température initiale T_{1i} et la source chaude (2) a une température initiale T_{2i} . Quelles sont les relations vérifiées par les températures finales T_{f1} et T_{f2} ?

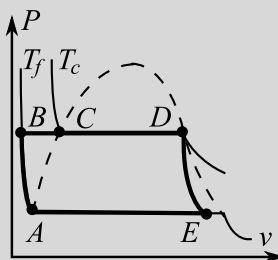
$$\square \text{ a. } T_{f1} = T_{i1} \text{ et } T_{f2} = T_{i2} \quad \square \text{ b. } T_{f1} = T_{f2}$$

$$\square \text{ c. } T_{f2} \leq \sqrt{T_{i1} T_{i2}} \quad \square \text{ d. } T_{f1} \geq \sqrt{T_{i1} T_{i2}}$$

- 10 Déterminer le travail maximal que le moteur précédent peut fournir.

$$\square \text{ a. } W_{\max} = C \left(\sqrt{T_{i1}} - \sqrt{T_{i2}} \right)^2 \quad \square \text{ b. } W_{\max} = -C \left(\sqrt{T_{i1}} - \sqrt{T_{i2}} \right)^2$$

$$\square \text{ c. } W_{\max} = -C (T_{i2} - T_{i1}) \quad \square \text{ d. } W_{\max} = C (T_{i2} - T_{i1})$$



Les questions suivantes étudient le fonctionnement d'une turbine fonctionnant suivant un cycle diphasé liquide-vapeur de Rankine décrit sur le diagramme de Clapeyron ci-dessus. Le cycle est ditherme entre une source froide à $T_f = 35^\circ\text{C}$ et une source chaude à $T_c = 285^\circ\text{C}$. On rappelle que pour un fluide en écoulement le premier principe s'écrit $\Delta H = W_{\text{utile}} + Q$. La courbe de saturation est représentée en pointillé.

Dans toute l'étude on raisonnera sur une masse $m = 1\text{ kg}$. On rappelle que l'entropie massique d'un mélange diphasé est donnée par l'expression $S = c_l \ln T + xL_v(T)/T + \text{cte}$, où $c_l = 4,18\text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ est la capacité thermique massique du liquide saturant ou non, x la fraction massique de vapeur et $L_v(T)$, l'enthalpie massique de vaporisation à la température T avec $L_v(T_f) = 2415\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $L_v(T_c) = 1508\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

- 11** En D, la vapeur est saturante seule. La détente DE est adiabatique réversible. Déterminer le titre massique x_E en vapeur en E.

☐ a. $x = c_l \frac{T_f}{L_v(T_f)} \ln \frac{T_c}{T_f}$ ☐ b. $x = \frac{T_f}{L_v(T_f)} \left(c_l \ln \frac{T_c}{T_f} + \frac{L_v(T_c)}{T_c} \right)$

☐ c. $x = 0,317$ ☐ d. $x = 0,661$

- 12** On suppose que la compression AB est adiabatique. Déterminer les travaux utiles W_{AB} et W_{DE} reçus par le système dans les transformations AB et DE.

☐ a. $W_{AB} = 0$ ☐ b. $W_{AB} = 1045\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

☐ c. $W_{DE} = 954\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ ☐ d. $W_{DE} = -956\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

- 13** La transformation BD a lieu dans une chaudière sans pièces mobiles. De même, dans le condenseur EA il n'y a aucune pièce mobile. Déterminer les chaleurs Q_c et Q_f reçues par le système respectivement de la source chaude et de la source froide.
- ☐ a. $Q_c = 2553 \text{ kJ.kg}^{-1}$ ☐ b. $Q_c = -2553 \text{ kJ.kg}^{-1}$
☐ c. $Q_f = -1597 \text{ kJ.kg}^{-1}$ ☐ d. $Q_f = 1597 \text{ kJ.kg}^{-1}$
- 14** Déterminer le rendement η de la machine thermique ainsi que le rendement de Carnot η_c correspondant.
- ☐ a. $\eta = 0,424$ ☐ b. $\eta = 0,596$
☐ c. $\eta_c = 0,448$ ☐ d. $\eta_c = 0,714$
- 15** Déterminer la ou les transformations non réversibles dans le cycle :
- ☐ a. compression AB ☐ b. chauffage BC
☐ c. vaporisation CD ☐ d. condensation EA

Voir corrigés page [268](#)

20 Température – Gaz parfait – Théorie cinétique

VRAI/FAUX

1 Généralités

☐ V ☒ F a. Lorsque la température passe de 20 °C à 40 °C, elle est doublée.

Il faut raisonner sur la température absolue qui passe de 293,15 K à 313,15 K. Elle est loin d'être multipliée par 2.

☐ V ☒ F b. Plus la température est élevée, plus la vitesse quadratique moyenne est faible.

La vitesse quadratique moyenne est proportionnelle à $\sqrt{T}$, donc si la température augmente, la vitesse quadratique aussi : l'agitation thermique est plus importante.

☒ V ☐ F c. Pour un gaz parfait, l'énergie interne est la somme de toutes les énergies cinétiques microscopiques.

L'énergie interne est par définition la somme de toutes les énergies au niveau microscopique. Dans un gaz parfait, on fait l'hypothèse que les forces d'interaction entre particules (appelées forces de Van der Waals) sont nulles, donc l'énergie potentielle correspondante est nulle. La seule énergie microscopique est donc l'énergie cinétique.

☒ V ☐ F d. La capacité thermique à volume constant d'un gaz parfait dépend du nombre d'atomes des molécules.

Le nombre de degrés de liberté dépend du nombre d'atomes constituant une molécule. La capacité thermique étant directement liée au nombre de degrés de liberté, elle dépend du nombre d'atomes.

☒ V ☐ F e. Pour une molécule diatomique, la capacité thermique à volume constant dépend de la température.

Aux températures usuelles (par exemple entre 2 K et 6 000 K pour une molécule de dioxygène), la capacité thermique est constante et égale à $\frac{5}{2}n_mRT$, où n_m est le nombre de moles : cela correspond aux 5 degrés de liberté (trois de translation et deux de rotation). À plus haute température, la molécule peut se mettre à vibrer et la capacité thermique devient $\frac{7}{2}n_mRT$.

QCM

Notations. L'espace est repéré par le trièdre direct (O, x, y, z) . On considère le modèle simplifié suivant pour le gaz parfait :

- la norme de la vitesse de toutes les particules est égale à u (vitesse quadratique moyenne) ;

- les sens des vitesses se répartissent de manière équiprobable suivant les six sens de l'espace ($\vec{u}_x, -\vec{u}_x, \vec{u}_y, -\vec{u}_y, \vec{u}_z, -\vec{u}_z$).

2 Une enceinte parallélépipédique contient un gaz parfait constitué de n particules de masse m par unité de volume. On s'intéresse à celles qui viennent frapper la paroi perpendiculaire à l'axe Ox en se déplaçant dans le sens des x croissants. Déterminer le nombre dN de ces particules venant frapper une surface dS de cette paroi pendant l'intervalle de temps dt ainsi que la variation de leur quantité de mouvement individuelle $\Delta\vec{p}$ si elles sont réfléchies selon Ox .

☐ a. $dN = \frac{1}{3}nuds\,dt$ ☒ b. $dN = \frac{1}{6}nuds\,dt$

☐ c. $\Delta\vec{p} = \vec{0}$ ☒ d. $\Delta\vec{p} = -2mu\vec{u}_x$

Les particules frappant la surface dS pendant dt doivent avoir une vitesse $\vec{v} = +u\vec{u}_x$ et être situées dans le cylindre de section dS et de longueur $\ell = udt$ perpendiculaire à la paroi. Cette longueur ℓ correspond à la distance parcourue pendant dt . Au total il y a $nudtdS$ particules dans ce cylindre, mais seulement celles qui ont une vitesse suivant les x croissants viennent frapper la paroi c'est-à-dire 1/6 de l'ensemble donc $dN = \frac{1}{6}nuds\,dt$.

La quantité de mouvement d'une particule incidente est $\vec{p}_i = mu\vec{u}_x$ et après réflexion $\vec{p}_r = -mu\vec{u}_x$, donc la variation de quantité de mouvement est $\Delta\vec{p} = \vec{p}_r - \vec{p}_i = -2mu\vec{u}_x$.



Il faut raisonner vectoriellement sinon on trouve $\Delta\vec{p} = \vec{0}$.

3 Déterminer la force $\vec{F}_{dS \rightarrow part}$ exercée par la surface dS sur les particules qui la frappent pendant dt . Par la loi d'action et de réaction, en déduire la pression exercée sur la paroi.

☐ a. $\vec{F}_{dS \rightarrow part} = -2mu^2\vec{u}_x$ ☒ b. $\vec{F}_{dS \rightarrow part} = -\frac{1}{3}nm u^2 dS dt \vec{u}_x$

☐ c. $P = \frac{1}{3}nm u^2$ ☒ d. $P = \frac{1}{3}nm u^2$

Chaque particule venant frapper la paroi subit une variation de quantité de mouvement $\Delta\vec{p}$, donc la variation de la quantité de mouvement des dN particules est :

$$\Delta\vec{p}_{dN} = dN \cdot \Delta\vec{p} = \frac{1}{6}nuds\,dt \cdot (-2mu\vec{u}_x) = -\frac{1}{3}nm u^2 dS dt \vec{u}_x$$

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, on trouve la force exercée par dS sur les particules :

$$\vec{F}_{dS \rightarrow part} = \frac{\Delta\vec{p}_{dN}}{dt} = -\frac{1}{3}nm u^2 dS \vec{u}_x$$

La troisième loi de Newton nous dit que la force exercée par les particules sur dS est $\vec{F}_{part \rightarrow dS} = -\vec{F}_{dS \rightarrow part}$, or $\vec{F}_{part \rightarrow dS} = PdS\vec{u}_x$ d'où P .

- 4** Connaissant l'expression de la pression P dans le gaz calculée précédemment, déterminer l'expression de la vitesse quadratique moyenne en fonction de la température :

☒ a. $u = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$ ☐ b. $u = \sqrt{\frac{3k_B T}{mV}}$

☐ c. $u = \sqrt{\frac{3RT}{mV}}$ ☐ d. $u = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$

L'équation d'état des gaz parfaits s'écrit $PV = n_n RT$, où n_n est le nombre de moles. Ici, nous voulons l'exprimer en fonction du nombre de particules par unité de volume soit $n = \frac{n_n N_A}{V}$ où N_A est le nombre d'Avogadro-Ampère. Sachant que $k_B = \frac{R}{N_A}$ on obtient $P = nk_B T$. En utilisant l'expression de P de la question de précédente, on obtient $P = \frac{1}{3}nm u^2 = nk_B T$, d'où l'expression de u .

- 5** Établir l'expression de l'énergie interne pour un gaz parfait monoatomique. On note n_n le nombre de moles et N le nombre total de particules.

☒ a. $U = \frac{3}{2}n_n RT$ ☒ b. $U = \frac{3}{2}Nk_B T$

☐ c. $U = \frac{3}{2}k_B T$ ☐ d. $U = \frac{9}{2}Nk_B T$

L'énergie interne représente l'énergie totale au niveau microscopique ; donc ici il s'agit uniquement de l'énergie cinétique de translation puisqu'il n'y a pas d'interaction entre particules (à l'exception des chocs élastiques). On peut donc écrire pour les N particules

du gaz : $U = E_c = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m u_i^2 = \frac{1}{2} m N u^2$. On utilise le résultat de la question précédente

$u = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$ ce qui donne $U = \frac{3}{2} N k_B T = \frac{3}{2} n_n RT$.

- 6** Une enceinte est séparée en deux volumes V identiques, notés (1) et (2) par une paroi perpendiculaire à l'axe Ox , percée d'un petit trou de section s . On suppose que l'axe Ox est orienté de l'enceinte (1) vers l'enceinte (2). Les enceintes contiennent respectivement N_1 et N_2 particules. Déterminer le nombre de particules $dN_{1 \rightarrow 2}$ qui traversent le trou de (1) à (2) pendant l'intervalle de temps dt .

☐ a. $dN_{1 \rightarrow 2} = \frac{N_1}{V} s u dt$ ☐ b. $dN_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{3} \frac{N_1}{V} s u dt$

☐ c. $dN_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{6} N_1 s u dt$ ☒ d. $dN_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{6} \frac{N_1}{V} s u dt$

Le calcul est semblable à celui de la question 2 en remplaçant dS par s et n par N_1/V , d'où $dN_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{6} \frac{N_1}{V} su dt$.

7 Déterminer pour l'enceinte précédente le nombre de particules $dN_{2 \rightarrow 1}$ qui traversent le trou de (2) à (1) pendant l'intervalle de temps dt .

☐ a. $dN_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{6} \frac{N_1}{V} su dt$ ☒ b. $dN_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{6} \frac{N_2}{V} su dt$

☐ c. $dN_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{6} \frac{N_1 - N_2}{V} su dt$ ☐ d. $dN_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{3} \frac{N_2}{V} su dt$

Le calcul est semblable à celui de la question précédente sauf qu'il ne faut prendre en compte que les particules de l'enceinte (2) se déplaçant dans le sens des x décroissants, ce qui représente aussi $1/6$ des particules, et que c'est la densité particulaire dans (2) N_2 qui intervient. Soit $dN_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{6} \frac{N_2}{V} su dt$.

8 On note N le nombre total de particules présentes dans les deux enceintes. Déterminer une équation différentielle vérifiée par N_1 :

☒ a. $\frac{dN_1}{dt} + \frac{su}{3V} N_1 = \frac{su}{6V} N$ ☐ b. $\frac{dN_1}{dt} + \frac{su}{6V} N_1 = \frac{su}{6V} N$

☐ c. $\frac{dN_1}{dt} + \frac{su}{6V} N_1 = 0$ ☐ d. $\frac{dN_1}{dt} + \frac{su}{3V} N_1 = \frac{su}{3V} N$

La variation du nombre de particules dans l'enceinte (1) est égale au nombre de particules entrant $dN_{2 \rightarrow 1}$ moins le nombre de particules sortant $dN_{1 \rightarrow 2}$, soit :

$$dN_1 = \frac{1}{6} \frac{N_2}{V} su dt - \frac{1}{6} \frac{N_1}{V} su dt = \frac{1}{6V} (N - 2N_1) su dt \Rightarrow \frac{dN_1}{dt} + \frac{su}{3V} N_1 = \frac{su}{6V} N$$

9 Initialement toutes les particules sont du côté (1). Exprimer N_1 en fonction du temps.

☐ a. $N_1 = N \exp\left(-\frac{sut}{3V}\right)$ ☐ b. $N_1 = \frac{N}{2} \left(1 - \exp\left(-\frac{sut}{3V}\right)\right)$

☒ c. $N_1 = \frac{N}{2} \left(1 + \exp\left(-\frac{sut}{3V}\right)\right)$ ☐ d. $N_1 = N \left(1 - \exp\left(-\frac{sut}{3V}\right)\right)$

La solution générale de l'équation différentielle est $N_1 = Ae^{-t/\tau} + \frac{N}{2}$ avec $\tau = \frac{3V}{su}$. À $t = 0$, on a $N_1 = N$, d'où $A = N/2$. C'est donc la réponse c qui est juste.

21 Pression – Statique des fluides

VRAI/FAUX

1 Généralités

☐ V ☒ F a. La pression est uniforme dans un fluide dense comme l'eau.

La pression en un point d'un fluide est égale au poids de la colonne de fluide, de surface 1 m^2 située au-dessus du point. Contrairement aux gaz, les liquides ont une masse volumique importante, donc une faible variation de l'altitude peut entraîner une forte variation du poids de la colonne au-dessus.

☒ V ☐ F b. La pression au sommet de l'Everest (environ 8 000 m) est environ 1/3 de la pression au niveau de la mer.

Dans une atmosphère isotherme à 273 K, la hauteur d'échelle, c'est-à-dire la hauteur à laquelle il faut monter pour que la pression soit divisée par $e \approx 2,7$ est environ 8 km.

☒ V ☐ F c. À environ 10 m de profondeur sous l'eau, la pression atmosphérique est doublée.

À la profondeur h , la loi barométrique donne une pression $P = P_0 + \rho gh$ soit pour l'eau $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $g \approx 10 \text{ m.s}^{-2}$ et $h = 10 \text{ m}$, donc $\rho gh = 10^5 \text{ Pa} \approx P_0$. C'est pour cette raison que l'on utilise un liquide plus lourd que l'eau dans les baromètres.

QCM

2 On considère un gaz parfait, à température constante T , de masse volumique ρ , de masse molaire M , dans un champ de pesanteur d'accélération $\vec{g}$ uniforme selon l'axe Oz vertical ascendant. La pression P du gaz vérifie :

☒ a. $\frac{dP}{dz} = -\rho g$ ☒ b. $P = \frac{\rho RT}{M}$

☐ c. $\frac{dP}{dz} = \rho g$ ☐ d. $P = \rho RT$

Si l'on considère une couche d'épaisseur dz entre les altitudes z et $z + dz$, de surface S , la relation d'équilibre donne :

$$P(z)S - P(z+dz)S - \rho g S dz = 0 \Rightarrow -\frac{dP}{dz} S dz - \rho g S dz = 0 : \text{on retrouve la loi fondamentale de la statique des fluides.}$$

Si on note m la masse de n moles de gaz, la loi des gaz parfaits s'écrit $PV = \frac{mRT}{M}$, or $\rho = \frac{m}{V}$, d'où la réponse b.

- 3** On note P_0 , la pression à l'altitude $z = 0$. L'expression de la pression en fonction de z est :

☐ a. $P = P_0 - \rho g z$ ☐ b. $P = P_0 + \rho g z$
☒ c. $P = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)$ ☐ d. $P = P_0 \exp\left(\frac{Mgz}{RT}\right)$

Dans un gaz, on ne peut pas considérer ρ comme constante, il faut donc remplacer ρ par son expression en fonction de P et l'équation de la statique devient : $\frac{dP}{dz} + \frac{MgP}{RT} = 0$.

Comme $\frac{Mg}{RT}$ est une constante, on a une équation du premier ordre à coefficients constants dont la solution est $P = A \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)$. En choisissant $P(0) = P_0$, on trouve $A = P_0$.

- 4** On note ρ_0 la masse volumique à $z = 0$. On prend maintenant un modèle plus réaliste, pour lequel $T = az + T_0$. La pression et la masse volumique en fonction de l'altitude sont :

☐ a. $P = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{R(az + T_0)}\right)$ ☒ b. $P = P_0 \left(\frac{T_0}{az + T_0}\right)^{\frac{Mg}{aR}}$
☐ c. $\rho = \rho_0 \frac{T_0}{az + T_0} \exp\left(-\frac{Mgz}{R(az + T_0)}\right)$ ☒ d. $\rho = \rho_0 \left(\frac{T_0}{az + T_0}\right)^{\frac{Mg}{aR} + 1}$

Dans l'équation, précédente il faut séparer les variables avant d'intégrer car $\frac{Mg}{RT}$ n'est plus une constante. On a alors $\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{R(az + T_0)} dz$. L'intégration donne $\ln P = -\frac{Mg}{Ra} \ln(az + T_0) + cte$. Pour $z = 0$, on a $P = P_0$ et $T = T_0$, donc $\ln \frac{P}{P_0} = -\frac{Mg}{Ra} \ln \frac{az + T_0}{T_0}$, ce qui donne la réponse **b** en faisant disparaître les logarithmes.

L'équation des gaz parfaits donne $\rho = \frac{MP}{RT} = \frac{MP_0}{R(az + T_0)} \left(\frac{T_0}{az + T_0}\right)^{\frac{Mg}{aR}}$ soit $\rho = \frac{MP_0}{RT_0} \left(\frac{T_0}{az + T_0}\right)^{\frac{Mg}{aR} + 1}$ ce qui donne la réponse **d** avec $\rho_0 = \frac{MP_0}{RT_0}$.

- 5** On modélise une étoile par une boule de gaz de masse volumique constante ρ , de rayon a . La gravité à une distance r du centre est alors $\vec{g} = -\frac{4}{3}G\pi\rho r\vec{u}_r$. L'équation d'équilibre s'écrit en coordonnées sphériques $\frac{dP}{dr} = \rho\vec{g}$. On considère que la pression en $r = a$ est nulle (vide). La pression au centre de l'étoile est :

☒ a. $P = \frac{2}{3}G\pi\rho^2 a^2$ ☐ b. $P = \frac{4}{3}G\pi\rho^2 a^2$
☐ c. $P = 0$ ☒ d. $P = -\frac{2}{3}G\pi\rho^2 a^2$

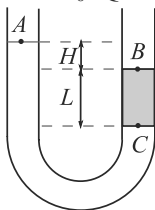
L'équation de la statique s'écrit $\frac{dP}{dr} = -\frac{4}{3}G\pi\rho^2r$, donc l'intégration donne $P = -\frac{2}{3}G\pi\rho^2r^2 + \text{cte}$. Pour $r = a$, la pression est nulle ce qui permet de déterminer la constante et finalement $P = \frac{2}{3}G\pi\rho^2(a^2 - r^2)$. Pour $r = 0$ on trouve la réponse **a**.

- 6** On s'intéresse à un liquide incompressible, à température constante T , de masse volumique ρ , de masse molaire M , dans un champ de pesanteur d'accélération $\vec{g}$ uniforme selon l'axe Oz vertical ascendant. Le liquide est situé dans le demi-espace $z < 0$ et au-dessus lui ($z > 0$), l'atmosphère a une pression P_0 . La pression P du liquide est :

- ☒ **a.** $P = P_0 - \rho gz$ ☐ **b.** $P = P_0 + \rho gz$
☐ **c.** $P = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)$ ☐ **d.** $P = P_0 \exp\left(\frac{Mgz}{RT}\right)$

Dans le cas d'un liquide, on peut considérer ρ constante donc l'équation de la statique s'intègre en $P = -\rho gz + \text{cte}$. Or pour $z = 0$, $P = P_0$ d'où la réponse **a**. On vérifie bien qu'à une profondeur h , soit pour $z = -h$, on a une pression supérieure à P_0 (on retrouve la loi barométrique $P = P_0 + \rho gh$).

- 7** On étudie l'équilibre de deux liquides dans un tube en U. Le liquide blanc sur la figure a une masse volumique ρ_1 et le liquide coloré, une masse volumique $\rho_2 > \rho_1$. La pression atmosphérique au-dessus des liquides est P_0 . Quelle est la pression au point C ?



- ☐ **a.** $P_C = \rho_2 gL$ ☒ **b.** $P_C = P_0 + \rho_1 g(H + L)$
☒ **c.** $P_C = P_0 + \rho_2 gL$ ☐ **d.** $P = P_0 + \rho_2 g(H + L)$

On applique la loi barométrique dans le tube de gauche et pour le liquide coloré : $P_C = P_B + \rho_2 gL$. Avec $P_B = P_0$, on trouve la réponse **c**. Dans le liquide blanc, si on appelle C_g , le point à la même profondeur que C, mais dans le tube de gauche, alors C et C_g étant dans le même liquide, $P_C = P_{C_g}$. La loi barométrique pour le liquide blanc donne $P_{C_g} = P_A + \rho_1 g(H + L)$. Or $P_A = P_0$, ce qui donne la réponse **b**.

- 8** Sur le cas précédent, on suppose maintenant que le tube de gauche a une section s et le tube de droite une section S . Déterminer la hauteur h dont est descendu le point A et la force F qu'il faut appliquer en A pour avoir A et B à la même hauteur :

- ☒ **a.** $h = H\left(1 + \frac{s}{S}\right)$ ☐ **b.** $h = \frac{H}{2}$
☒ **c.** $F = sgL(\rho_2 - \rho_1)$ ☐ **d.** $F = s\rho_1 gh$

Les liquides sont incompressibles donc le volume est conservé. Si on note h' la hauteur dont est monté B , alors la conservation du volume donne $sh = Sh'$, d'autre part $h + h' = H$ d'où la réponse **a**.

En A , la pression est $P_0 + F/s$. En B la pression est P_0 . En C , la pression est $P_0 + \rho_2 gL$. Le point C_g , à la même hauteur que C , dans le tube de gauche est maintenant à une profondeur L sous A , puisque A et B sont à la même hauteur. On a donc $P_{C_g} = P_A + \rho_1 gL$.

En utilisant l'égalité des pressions en C et C_g , on peut écrire $P_0 + \frac{F}{s} + \rho_1 gL = P_0 + \rho_2 gL$, d'où F .

- 9** Un solide de volume V et de masse volumique ρ flotte à l'interface de deux liquides non miscibles de masses volumiques ρ_1 et ρ_2 avec $\rho_2 > \rho_1$. Déterminer le volume V_1 de la partie du cube dans le liquide (1) :

☐ **a.** $V_1 = V \frac{\rho_1}{\rho_2}$ ☒ **b.** $V_1 = V \frac{\rho - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}$

☐ **c.** $V_1 = V \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}$ ☐ **d.** $V_1 = \frac{\rho}{\rho_1} V$

Puisque $\rho_2 > \rho_1$, le liquide (1) est au-dessus du liquide (2). La part immergée dans le liquide (2) est $V - V_1$. L'équilibre entre le poids et les poussées d'Archimède s'écrit : $\rho V g = \rho_1 V_1 g + \rho_2 (V - V_1) g$ soit $V_1 = \frac{\rho - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} V$.

- 10** On reprend l'expérience précédente. On définit l'axe Oz ascendant passant par le centre du cube, l'origine O étant sur la ligne de flottaison à l'équilibre. On note C le point du cube coïncidant avec O à l'équilibre. On appuie légèrement sur le cube, de manière à ce que C descende d'une petite hauteur h_0 sous O et on lâche sans vitesse initiale. On note a la longueur du côté du cube. Déterminer la pulsation ω des petites oscillations et l'équation donnant la position de C au cours du temps.

☒ **a.** $z_C = -h_0 \cos \omega t$ ☐ **b.** $z_C = h_0 \cos \omega t$

☐ **c.** $\omega = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho} \frac{g}{a}$ ☒ **d.** $\omega = \sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho} \frac{g}{a}}$

Lorsque le point C est à l'altitude $z_C > 0$, le volume immergé dans le liquide (1) est $V_1 + z_C a^2$ et celui immergé dans le liquide (2) est $V - V_1 - z_C a^2$. Les trois forces à prendre en compte sont :

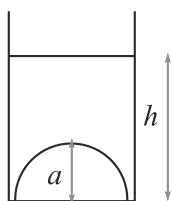
- le poids : $-\rho V g \vec{u}_z$.
- la poussée d'Archimède du liquide (1) : $\rho_1 (V_1 + z_C a^2) g \vec{u}_z$.
- la poussée d'Archimède du liquide (2) : $\rho_2 (V - V_1 - z_C a^2) g \vec{u}_z$.

La relation fondamentale de la dynamique appliquée au cube s'écrit :

$V \rho \ddot{z}_C = -\rho V g + \rho_1 (V_1 + z_C a^2) g + \rho_2 (V - V_1 - z_C a^2) g$. Avec la condition d'équilibre $\rho V g = \rho_1 V_1 g + \rho_2 (V - V_1) g$ et $V = a^3$, on peut simplifier l'équation qui devient : $\ddot{z}_C + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho} \frac{g}{a} z_C = 0$ ce qui est une équation d'oscillateur harmonique de pulsation ω telle

que $\omega^2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho} \frac{g}{a}$. La solution générale est $z_C = A \cos \omega t + B \sin \omega t$. À $t = 0$, on a $z_C = -h_0$ et $\dot{z}_C = 0$ donc $A = -h_0$ et $B = 0$.

- 11** Une demi-sphère de rayon a est posée au fond d'un récipient rempli d'eau de masse volumique ρ_e . Déterminer la force $\vec{F}$ exercée sur cette demi-sphère par l'eau. La pression atmosphérique est P_0 . On prendra l'axe Oz vers le haut.



☐ a. $\vec{F} = P_0 2\pi a^2 \vec{u}_z$

☐ b. $\vec{F} = \frac{2}{3} \rho_e \pi a^3 g \vec{u}_z$

☒ c. $\vec{F} = \frac{2}{3} \pi a^3 \rho_e g - \pi a^2 (P_0 + \rho_e g h) \vec{u}_z$

☐ d. $\vec{F} = (P_0 + \rho_e g(h - a)) 2\pi a^2 \vec{u}_z$

Étant donné que l'objet est posé au fond, on ne peut pas appliquer le théorème d'Archimède car le fluide n'entoure pas l'objet. Il y a deux manières de faire le calcul.

Première méthode : on détermine la pression en un point M de la surface de la demi-sphère avec la loi barométrique. On en déduit la force de pression s'exerçant sur une surface dS et on intègre après projection sur l'axe vertical.

Deuxième méthode : supposons qu'il y ait un mince film d'eau sous la demi-sphère, dans ce cas on peut appliquer le théorème d'Archimède et la force exercée par l'eau est $\vec{\Pi} = \frac{2}{3} \pi a^3 \rho_e g \vec{u}_z$, le terme $2\pi a^3/3$ est le volume de la demi-sphère. En faisant ce raisonnement, on a compté une force de pression exercée sur la base de la demi-sphère, qu'il faut donc retrancher. La pression à la profondeur h est $P_0 + \rho_e g h$, donc la force de pression qui s'exercerait sur la base est $\vec{F}_B = (P_0 + \rho_e g h) \pi a^2 \vec{u}_z$. La force s'exerçant sur l'objet est donc $\vec{F} = \vec{\Pi} - \vec{F}_B$.

22 Premier principe de la thermodynamique

VRAI/FAUX

1 Généralités

☐ V ☒ F a. Le transfert thermique reçu par un système ne dépend que de l'état initial et de l'état final.

Le transfert thermique n'est pas une fonction d'état. Sa valeur dépend du chemin suivi lors de la transformation.

☐ V ☒ F b. Le travail est une fonction d'état.

Comme le transfert thermique, le travail n'est pas une fonction d'état. Sa valeur dépend du chemin suivi lors de la transformation. C'est pour cette raison que les moteurs fonctionnant par cycles peuvent fournir un travail.

☒ V ☐ F c. La variation d'énergie interne d'un système ne dépend que de l'état initial et de l'état final.

L'énergie interne est une fonction d'état : sa variation ne dépend pas du chemin suivi lors de la transformation.

☐ V ☒ F d. Dans une transformation isotherme $Q = 0$.

Il ne faut pas confondre isotherme et adiabatique. Même si la température reste constante, il peut y avoir échange de chaleur.

☒ V ☐ F e. Le travail élémentaire des forces de pression est $\delta W = -PdV$ où P est la pression du gaz seulement si la transformation est quasi statique.

Le travail élémentaire (sauf dans le cas d'un écoulement ou d'une enceinte initialement vide) est $\delta W = -P_{ext}dV$ où P_{ext} est la pression extérieure. Dans le cas d'une transformation quasi statique (*a fortiori* réversible) la pression du système est égale à la pression extérieure (équilibre mécanique à tout instant mais pas forcément équilibre total). Ainsi $\delta W = -PdV$. Ce n'est pas vrai si la transformation est trop rapide : $P \neq P_{ext}$ et $\delta W = -P_{ext}dV$.

☐ V ☒ F f. Le premier principe peut s'écrire $\Delta U = \Delta W + \Delta Q$.

La notation Δ indique une variation, or le travail et le transfert thermique représentent des quantités échangées et non des variations : c'est donc une faute d'écrire $\Delta U = \Delta W + \Delta Q$, il faut écrire $\Delta U = W + Q$. De même pour une transformation infinitésimale, il faut écrire $dU = \delta W + \delta Q$ et non $dU = dW + dQ$ car la notation d représente une variation alors que δ représente une petite quantité.

QCM

2 Une mole de gaz parfait dans l'état initial (P_1, V_1, T_1) subit une détente isotherme quasi statique jusqu'à la pression $P_1/2$. Le travail et la chaleur reçus sont :

☒ a. $W = -RT \ln 2$ ☐ b. $W = RT \ln 2$

☐ c. $Q = 0$ ☒ d. $Q = RT \ln 2$

Le travail élémentaire pour une transformation quasi statique s'écrit $\delta W = -PdV$ car $P = P_{ext}$, soit avec l'équation des gaz parfaits $\delta W = -nRT \frac{dV}{V}$. On intègre entre V_1 et V_{final} avec $T = cte$ soit $W = -nRT \ln \left(\frac{V_{final}}{V_1} \right)$. Or $n = 1$ et avec l'équation des gaz parfaits $\frac{V_{final}}{V_1} = \frac{P_1}{(P_1/2)}$. Pour la chaleur on utilise le premier principe : comme la transformation est isotherme $\Delta U = 0$ et $Q = -W$.

- 3** Une mole de gaz parfait dans l'état initial (P_1, V_1, T_1) subit une détente adiabatique quasi statique jusqu'à la pression $P_1/2$. La variation d'énergie interne et le travail reçu sont :

☒ a. $\Delta U = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left(2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right)$ ☐ b. $\Delta U = \frac{RT_1}{\gamma - 1}$

☐ c. $W = -Q$ ☒ d. $W = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left(2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right)$

Il s'agit d'un gaz parfait qui subit une transformation quasi statique adiabatique (avec γ constant), on peut donc appliquer les lois de Laplace $T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{cte}$. La température finale est donc $T_f = T_1 \left(\frac{P_1}{P_1/2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$. En appliquant la première loi de Joule, $\Delta U = \frac{R}{\gamma - 1} (T_f - T_1)$, d'où le résultat. Comme la transformation est adiabatique $Q = 0$ donc $\Delta U = W$.

- 4** Une mole de gaz parfait dans l'état initial (P_1, V_1, T_1) subit une compression isochore quasi statique jusqu'à la pression $2P_1$. Les variations d'énergie interne et d'enthalpie vérifient :

☒ a. $\Delta U = Q$ ☒ b. $\Delta U = \frac{RT_1}{\gamma - 1}$

☐ c. $\Delta H = W$ ☐ d. $\Delta H = Q$

Si la compression est isochore, le travail $W = - \int P dV$ est nul puisque $dV = 0$ donc le premier principe donne $\Delta U = Q$. L'équation des gaz parfaits donne $T_f = 2T_1$, donc $\Delta U = \frac{R}{\gamma - 1} (T_f - T_1) = \frac{RT_1}{\gamma - 1}$. Pour calculer ΔH on utilise la deuxième loi de Joule $\Delta H = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_f - T_1) = \frac{\gamma RT_1}{\gamma - 1}$ donc aucune réponse ne convient.

- 5** Pour la transformation précédente, le travail et la chaleur échangés sont :

☐ a. $Q = \frac{\gamma RT_1}{\gamma - 1}$ ☐ b. $Q = 0$

☒ c. $W = 0$ ☐ d. $W = \frac{RT_1}{\gamma - 1}$

De ce qui précède, on déduit $W = 0$ et $Q = \frac{RT_1}{\gamma - 1}$.

- 6** Une mole de gaz parfait dans l'état initial (P_1, V_1, T_1) subit une transformation isobare quasi statique jusqu'au volume $2V_1$. Les variations d'énergie interne et d'enthalpie vérifient :

☐ a. $\Delta U = W$ ☐ b. $\Delta U = W$

☒ c. $\Delta H = Q$ ☐ d. $\Delta H = Q$

La transformation est isobare donc $W = -P\Delta V$ et $\Delta H = \Delta U + \Delta(PV)$, soit $\Delta H = \Delta U + P\Delta V$. Avec le premier principe $\Delta U = Q - P\Delta V$ et on obtient $\Delta H = Q$.

7 Pour la transformation précédente, le travail et la chaleur échangés sont :

☐ a. $W = P_1 V_1$ ☒ b. $W = -P_1 V_1$

☒ c. $Q = \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_1 V_1$ ☐ d. $Q = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1}$

L'équation des gaz parfaits permet de déterminer la température finale $T_f = 2T_1$, donc avec la deuxième loi de Joule $\Delta H = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_f - T_1) = \frac{\gamma R T_1}{\gamma - 1}$ d'où Q sachant que $RT_1 = P_1 V_1$. Pour le travail, on a $W = -P\Delta V = -P_1 V_1$

On considère une enceinte de parois extérieures adiabatiques et indéformables, séparée en deux par une cloison mobile adiabatique. Le compartiment de gauche (1) contient n_1 moles d'un gaz parfait dans les conditions initiales (P_1, V_1, T_1) . Le compartiment de droite (2) contient le même gaz parfait dans les conditions initiales $(2P_1, V_1, T_1)$. On libère la cloison amovible. On indice par $f1$ et $f2$ les grandeurs finales respectives des compartiments (1) et (2).

8 La variation de l'énergie interne du système global vérifie :

☒ a. $\Delta U = 0$ ☐ b. $\Delta U = P_1 V_1$

☒ c. $\Delta U = \frac{n_1 R}{\gamma - 1} (2T_{f2} + T_{f1} - 3T_1)$ ☐ d. $\Delta U = \frac{n_1 R}{\gamma - 1} (T_{f2} + T_{f1} - 2T_1)$

Si l'on prend le système global (gaz + enceinte + cloison), la chaleur reçue est nulle car l'enceinte est adiabatique et le travail extérieur est nul aussi car la seule pièce qui se déplace (cloison) est à l'intérieur du système donc $\Delta U = 0$. L'énergie interne est une fonction extensive donc $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2$ avec $\Delta U_1 = \frac{n_1 R}{\gamma - 1} (T_{f1} - T_1)$ et $\Delta U_2 = \frac{n_2 R}{\gamma - 1} (T_{f2} - T_1)$. Or comme initialement $P_2 = 2P_1$, on a $n_2 = 2n_1$, c'est donc la réponse **c** qui convient.

9 Parmi les propositions suivantes, cochez celles qui sont vraies :

☐ a. $T_{f1} = T_{f2}$ ☒ b. $P_{f1} = P_{f2}$
☐ c. $V_{f1} = V_{f2}$ ☒ d. $V_{f1} + V_{f2} = 2V_1$

Dans l'état final, la cloison est immobile. Les seules forces horizontales s'exerçant sur cette cloison sont les forces de pression, leur résultante est donc nulle donc il y a la même pression de chaque côté.

L'enceinte est indéformable donc le volume total reste constant et égal à $2V_1$.

- 10** Déterminer une relation entre les températures finales, et en déduire la pression dans le compartiment (1).

☒ a. $2T_{f2} + T_{f1} - 3T_1 = 0$ ☐ b. $2T_{f2} + T_{f1} - T_1 = 0$

☐ c. $P_{f1} = P_{f2} = \frac{3}{1 + 2^{1/\gamma}} P_1$ ☒ d. $P_{f1} = P_{f2} = \frac{3}{2} P_1$

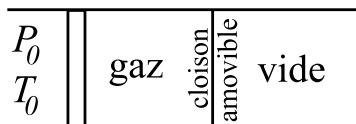
La relation entre les températures est obtenue à partir de l'expression de l'énergie interne (question 8).



L'erreur à ne pas commettre est d'utiliser la relation de Laplace entre P et T car la transformation est bien adiabatique mais pas quasi statique (la cloison se déplace brutalement). La réponse c obtenue avec cette loi est donc fausse.

Avec les équations des gaz parfaits et $P_{f1} = P_{f2}$, on a $\frac{T_{f1}}{V_{f1}} = 2 \frac{T_{f2}}{V_{f2}}$. On reporte dans $V_{f1} + V_{f2} = 2V_1$, ce qui donne $\frac{V_{f1}}{T_{f1}}(T_{f1} + 2T_{f2}) = 2V_1$; or $2T_{f2} + T_{f1} = 3T_1$ donc finalement $\frac{T_{f1}}{V_{f1}} = \frac{3T_1}{2V_1}$. Avec l'équation des gaz parfaits, $P_{f1} = 3P_1/2$.

- 11** On considère une enceinte adiabatique indéformable séparée initialement en deux compartiments de volume V_0 , l'un contenant une mole de gaz parfait, l'autre étant vide.



Le compartiment de gauche est séparé de l'atmosphère (P_0, T_0) par un piston diatherme. On enlève la cloison amovible. Déterminer l'état final du gaz :

☐ a. $(P_0, T_0, 2V_0)$ ☐ b. $\left(\frac{P_0}{2}, T_0, V_0\right)$

☒ c. (P_0, T_0, V_0) ☐ d. $\left(\frac{P_0}{2}, T_0, \frac{V_0}{2}\right)$

Dans l'état final, le piston est immobile donc le gaz a la même pression que l'atmosphère P_0 . Le piston est diatherme donc le gaz est aussi en équilibre thermique avec l'atmosphère, sa température est T_0 . L'équation des gaz parfaits nous donne alors un volume V_0 . Le gaz est dans le même état qu'initialement, il s'est juste déplacé vers la droite, ainsi que le piston.

12 Déterminer le travail et le transfert thermique reçus par le gaz de la question 11.

☒ a. $W = P_0 V_0$ ☐ b. $W = 0$

☐ c. $Q = 0$ ☒ d. $Q = -P_0 V_0$

L'erreur à ne pas commettre ici est d'appliquer $W = -\int P_{ext} dV$ car il y a un volume vide initialement, cela mènerait à $W = 0$ puisque le volume du gaz ne varie pas. Il faut revenir à la définition mécanique du travail. Si on note S la section du piston, la force exercée par l'atmosphère est $F = P_0 S$. Le piston se déplace d'une distance L et la force est motrice, donc le travail est $W = FL = P_0 S L$. Or le volume balayé par le piston est égal à $S L$ mais aussi à V_0 , puisque qu'initialement le gaz et le vide occupaient un volume $2V_0$.

Pour calculer Q , on applique le premier principe. Comme la température ne varie pas $\Delta U = 0$ et $Q = -W$.

13 On souhaite chauffer une masse M d'eau de capacité massique C de la température T_1 à la température T_2 en une durée Δt avec un résistor de résistance R (de capacité thermique négligeable). Déterminer l'intensité du courant nécessaire à l'opération.

☐ a. $I = \sqrt{\frac{MCT_2}{R\Delta t}}$

☐ b. $I = \sqrt{\frac{MC(T_2 - T_1)}{R}}$

☒ c. $I = \sqrt{\frac{MC(T_2 - T_1)}{R\Delta t}}$

☐ d. $I = \sqrt{\frac{MC(T_1 - T_2)}{R\Delta t}}$

Deux raisonnements sont possibles. Soit on inclut le résistor dans le système qui est alors {eau + résistor}. Ce système reçoit du travail électrique $W_e = RI^2 \Delta t$ de la part du générateur qui alimente le résistor. En supposant que le système est isolé de l'extérieur, le premier principe donne

$$\Delta U_{eau} + \Delta U_R = W_e \quad \text{or} \quad \Delta U_R \simeq 0 \quad \text{et} \quad \Delta U_{eau} = MC(T_2 - T_1) \quad \text{d'où} \quad I.$$

La deuxième méthode est de prendre uniquement l'eau comme système. Elle ne reçoit que la chaleur Q du résistor (par effet Joule). Le premier principe appliqué au résistor s'écrit $\Delta U_R = W_e - Q$ et comme $\Delta U_R \simeq 0$, alors $Q = W_e$ et on retrouve le même résultat.

Un résistor (résistance R , capacité thermique C_r) initialement à la température T_0 , est dans un milieu de température constante T_e . Le résistor est soumis à une tension E constante. D'autre part, il perd par unité de temps une quantité de chaleur $aC_r(T - T_e)$.

- 14** Quels sont le travail électrique et la chaleur reçus par le résistor dans l'intervalle de temps dt ?

☒ **a.** $\delta W_{el} = \frac{E^2}{R} dt$ ☐ **b.** $\delta W_{el} = -\frac{E^2}{R} dt$
☐ **c.** $\delta Q = aC_r(T - T_e)dt$ ☒ **d.** $\delta Q = -aC_r(T - T_e)dt$

Le travail reçu par le résistor de la part du générateur est $\delta W_{el} = \frac{E^2}{R} dt$ et comme on nous donne la chaleur perdue, la chaleur reçue est l'opposé soit $\delta Q = -aC_r(T - T_e)dt$.

- 15** Établir à partir du premier principe, l'équation différentielle pour la température du résistor et son expression générale en fonction du temps :

☐ **a.** $\frac{dT}{dt} - aT = \frac{E^2}{RC_r} - aT_e$
☒ **b.** $\frac{dT}{dt} + aT = \frac{E^2}{RC_r} + aT_e$
☒ **c.** $T = T_0 e^{-at} + \left(\frac{E^2}{aRC_r} + T_e \right) (1 - e^{-at})$
☐ **d.** $T = T_0 e^{at} + \left(-\frac{E^2}{aRC_r} + T_e \right) (1 - e^{at})$

On applique le premier principe au système résistor en tenant compte cette fois de sa capacité, entre l'instant t et l'instant $t + dt$: $dU = \delta W_{el} + \delta Q$ avec $dU = C_r dT$ donc $C_r dT = \frac{E^2}{R} dt - aC_r(T - T_e)dt$. En divisant par C_r et dt on trouve l'équation **b**.

La résolution de l'équation homogène donne Ae^{-at} où A est une constante et la solution particulière est $T_e + \frac{E^2}{aRC_r}$ donc la solution générale est $T = Ae^{-at} + T_e + \frac{E^2}{aRC_r}$. La condition initiale $T(0) = T_0$ mène à la solution **c**.

- 16** Quelle est la température limite T_{lim} du résistor et quelle est alors la puissance P fournie par le générateur pour maintenir le milieu à T_e ?

☐ **a.** $T_{lim} = T_e$ ☒ **b.** $T_{lim} = \frac{E^2}{aRC_r} + T_e$
☒ **c.** $P = \frac{E^2}{R}$ ☐ **d.** $P = \frac{E^2}{R} + aC_r T_e$

Lorsque $t \rightarrow +\infty$, la température $T \rightarrow T_e + \frac{E^2}{aRC_r}$: le résistor est plus chaud que le milieu extérieur, ce qui lui permet de céder spontanément de la chaleur à ce milieu. On peut considérer que la température du résistor est constante, donc son énergie interne aussi. Le premier principe appliqué au résistor donne $dU = Pdt - aC_r(T_{lim} - T_e)dt = 0$ soit $P = E^2/R$.

23 Second principe de la thermodynamique

VRAI/FAUX

1 Généralités

☐ V ☒ F a. L'entropie échangée est toujours positive.

L'entropie échangée est $S^e = \int \frac{\delta Q}{T_\Sigma}$ où T_Σ est la température à la périphérie du corps (en général celle du thermostat). Puisque $T_\Sigma > 0$, S^e est du signe de δQ .

☒ V ☐ F b. L'entropie créée est positive ou nulle.

L'entropie créée est positive pour une transformation irréversible et nulle pour une transformation réversible, jamais négative.

☐ V ☒ F c. Lors d'une transformation isotherme, l'entropie échangée est nulle.

Isotherme (température constante) ne signifie pas adiabatique (pas de transfert thermique échangé). L'entropie échangée n'est *a priori* pas nulle.

☒ V ☐ F d. La variation d'entropie d'un système ne dépend que de l'état initial et de l'état final.

L'entropie est une fonction d'état, donc sa variation ne dépend pas du chemin suivi.

☐ V ☒ F e. L'entropie créée ne dépend que de l'état initial et de l'état final.

L'entropie créée (comme l'entropie échangée) n'est pas une fonction d'état. Sa valeur dépend du chemin suivi lors de la transformation.

☐ V ☒ F f. Une transformation adiabatique est telle que $\Delta S = 0$.

Une transformation adiabatique a lieu sans échange de chaleur donc $S^e = 0$ et $\Delta S = S^c \geq 0$. Si la transformation est réversible alors $\Delta S = 0$ sinon $\Delta S > 0$.

☐ V ☒ F g. Une transformation telle que $\Delta S = 0$ est réversible.

Seule l'évaluation de l'entropie créée permet de savoir si la transformation est réversible ou non. La nullité de ΔS signifie seulement $S^e = -S^c$.

QCM

Une enceinte indéformable isolée de l'extérieur par des parois adiabatiques est divisée en deux compartiments de même volume. Les deux compartiments, de même volume, sont séparés par une paroi diatherme (qui laisse passer la chaleur) fixe. Chaque compartiment contient initialement deux gaz parfaits identiques ($2n, T, P_1, V$) et ($n, 2T, P_2, V$). On laisse l'équilibre s'établir.

2 La variation d'entropie du premier gaz est :

☐ a. $\Delta S_1 = \frac{2nR}{\gamma-1} \ln \frac{3}{2}$ ☐ b. $\Delta S_1 = \frac{4nR}{\gamma-1}$

☒ c. $\Delta S_1 = \frac{2nR}{\gamma-1} \ln \frac{4}{3}$ ☐ d. $\Delta S_1 = 0$

Il faut d'abord déterminer la température finale T_f des gaz, qui est la même puisque la paroi est diatherme. On applique le premier principe à l'ensemble des deux gaz et de l'enceinte : $W = 0$ car l'enceinte est indéformable et $Q = 0$ puisqu'elle est adiabatique donc $\Delta U = 0$. Soit $\Delta U_1 + \Delta U_2 = \frac{2nR}{\gamma-1}(T_f - T) + \frac{nR}{\gamma-1}(T_f - 2T) = 0$. On en tire $T_f = 4T/3$. La transformation étant isochore, l'identité thermodynamique pour le gaz parfait (1) s'écrit $dS_1 = \frac{2nR}{\gamma-1} \frac{dT_1}{T_1}$. En intégrant entre T et T_f , on trouve la réponse **c**.

3 La variation d'entropie de l'ensemble des deux gaz est :

☒ a. $\Delta S = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{32}{27}$

☐ b. $\Delta S = 0$

☐ c. $\Delta S = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{27}{8}$

☐ d. On ne peut pas calculer ΔS car il y a deux gaz distincts.

L'entropie est une fonction extensive donc $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$. Pour le gaz (2) qui évolue aussi de manière isochore, $dS_2 = \frac{nR}{\gamma-1} \frac{dT_2}{T_2}$ soit en intégrant entre $2T$ et T_f ; on obtient $\Delta S_2 = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{2}{3}$. La somme $\Delta S_1 + \Delta S_2$ donne la réponse **a**.

4 Pour l'ensemble des deux gaz, l'entropie échangée avec l'extérieur et l'entropie créée sont :

☒ a. $S^e = 0$ ☐ b. $S^e = \frac{3nR}{\gamma-1}$

☐ c. $S^c = 0$ ☒ d. $S^c = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{32}{27}$

Le système total n'échange pas de chaleur avec l'extérieur (évolution adiabatique) donc $S^e = 0$. On a alors $S^c = \Delta S - S^e = \Delta S$ soit la réponse **d**. L'entropie créée est strictement positive, la transformation est irréversible et la cause d'irréversibilité est la différence des températures initiales des gaz.

Un corps solide de capacité thermique C à la température T_1 est mis en contact avec un thermostat à la température T_2 . Il n'y a pas d'échange de chaleur ni de travail avec l'extérieur. On attend l'équilibre.

5 La chaleur Q reçue par le corps est :

- ☐ a. $Q = 0$ ☒ b. $Q = C(T_2 - T_1)$
☐ c. $Q = C(T_1 - T_2)$ ☐ d. $Q = C(T_2 + T_1)/2$

La température finale du corps est celle du thermostat. On applique le premier principe au corps solide avec $W = 0$, soit $\Delta U = Q$ avec $\Delta U = C(T_2 - T_1)$.

6 L'entropie échangée par le corps est :

- ☒ a. $S^e = C \frac{T_2 - T_1}{T_2}$ ☐ b. $S^e = C \frac{T_2 - T_1}{T_1}$
☐ c. $S^e = C \ln \frac{T_2}{T_1}$ ☐ d. $S^e = C \frac{T_2}{T_1}$

L'entropie échangée est $S^e = \int \frac{\delta Q}{T_\Sigma}$ où $T_\Sigma = T_2$ est la température du thermostat, soit
 $S^e = \frac{\int \delta Q}{T_2} = \frac{Q}{T_2}$.

7 La variation d'entropie du corps est :

- ☐ a. $\Delta S = 0$ ☐ b. $\Delta S = C \frac{T_2 - T_1}{T_1}$
☒ c. $\Delta S = C \ln \frac{T_2}{T_1}$ ☐ d. $\Delta S = C \frac{T_2}{T_1}$

Pour un corps solide, l'identité thermodynamique s'écrit $dS = C \frac{dT}{T}$. On intègre entre T_1 et T_2 et on trouve la réponse c.

8 On note S^c l'entropie créée. On a donc :

- ☐ a. $S^c = 0$ ☒ b. $S^c = C \ln \frac{T_2}{T_1} - C \frac{T_2 - T_1}{T_2}$
☐ c. La transformation est réversible ☒ d. La transformation est irréversible

Le deuxième principe s'écrit $\Delta S = S^e + S^c$, donc $S^c = \Delta S - S^e$, ce qui, d'après les précédentes questions donne la réponse b.

Il faut maintenant déterminer si $S^c = 0$ ou $S^c > 0$. On pose $X = \frac{T_1}{T_2}$, alors $S^c = C(X - 1 - \ln X)$. Par un tracé rapide des fonctions $X - 1$ et $\ln X$, on s'aperçoit que $X - 1 > \ln X$ sauf en $X = 0$. Donc sauf pour $T_1 = T_2$ (aucune transformation), on a $S^e > 0$. La transformation est irréversible et la cause d'irréversibilité est la différence de température entre le corps et le thermostat.

Un gaz parfait dans l'état initial (P_1, V_1, T_1) est en contact avec un thermostat à la même température. Il subit une compression isotherme réversible jusqu'à la pression $2P_1$.

9 La variation d'entropie du gaz est :

☐ a. $\Delta S = 0$ ☐ b. $\Delta S = -\frac{\gamma P_1 V_1}{(\gamma - 1)T_1} \ln 2$

☒ c. $\Delta S = -\frac{P_1 V_1}{T_1} \ln 2$ ☐ d. $\Delta S = \frac{P_1 V_1}{T_1} \ln 2$

On écrit l'identité thermodynamique en fonction des variables (P, T) , soit $dS = C_P \frac{dT}{T} - \frac{VdP}{T}$. Dans ce cas, la transformation est isotherme donc $dT = 0$. Avec l'équation des gaz parfaits, le deuxième terme devient $-nR \frac{dP}{P}$. On intègre entre P_1 et $2P_1$, soit $\Delta S = -nR \ln \frac{2P_1}{P_1}$. On obtient la réponse **c** en remplaçant nR par $P_1 V_1 / T_1$.

10 L'entropie échangée par le gaz et l'entropie créée sont :

☐ a. $S^e = 0$ ☒ b. $S^e = -\frac{P_1 V_1}{T_1} \ln 2$

☒ c. $S^c = 0$ ☐ d. $S^c = -\frac{P_1 V_1}{T_1} \ln 2$

Comme déjà utilisé précédemment, on obtient l'entropie échangée par l'expression $S^e = \int \frac{\delta Q}{T_\Sigma}$ où $T_\Sigma = T_1$ puisqu'ici la température du thermostat est T_1 . Dans le cas d'une transformation isotherme, l'énergie interne d'un gaz parfait est constante (1^{re} loi de Joule), on en déduit que $Q = -W$ et pour une compression isotherme quasi statique (ou réversible) $\delta W = -PdV = -nRT_1 dV/V$. Par intégration entre le volume initial V_1 et le volume final $V_1/2$, on trouve $W = nRT_1 \ln 2 = P_1 V_1 \ln 2$. On en déduit $S^e = \frac{Q}{T_1} = \frac{-P_1 V_1}{T_1} \ln 2$.

En ce qui concerne l'entropie créée, la transformation est réversible donc $S^c = 0$ d'après le résultat précédent, on a bien $\Delta S = S^e$.

Le même gaz dans l'état initial (P_1, V_1, T_1) est maintenant dans un cylindre fermé par un piston. À l'exception du piston les autres parois sont immobiles. Le piston assure l'équilibre mécanique avec l'extérieur à la pression P_1 . Le seul échange de chaleur a lieu avec le thermostat à température T_1 . On fait brusquement passer la pression extérieure à $2P_1$ et on attend l'équilibre du gaz.

11 Le travail et le transfert thermique reçus par le gaz sont :

☒ a. $W = P_1 V_1$ ☐ b. $W = P_1 V_1 \ln 2$

☐ c. $Q = -P_1 V_1 \ln 2$ ☒ d. $Q = -P_1 V_1$

La pression finale du gaz en équilibre avec l'extérieur est $2P_1$ donc le volume final est $V_1/2$. Dans le cas présent, la transformation a lieu à pression extérieure constante $P_{ext} = 2P_1$, on peut donc calculer le travail reçu par le gaz $W = - \int_{V_1}^{V_1/2} P_{ext} dV$ soit $W = -2P_1(V_1/2 - V_1)$ ou $W = P_1 V_1$. La transformation est isotherme donc $\Delta U = 0$ et $Q = -W$.

12 La variation d'entropie du gaz est :

☐ a. $\Delta S = 0$ ☐ b. $\Delta S = -\frac{\gamma P_1 V_1}{(\gamma - 1)T_1} \ln 2$

☒ c. $\Delta S = -\frac{P_1 V_1}{T_1} \ln 2$ ☐ d. $\Delta S = -\frac{P_1 V_1}{T_1}$

L'état initial et l'état final sont les mêmes que dans l'exercice précédent. Puisque S est une fonction d'état, sa variation est la même que pour la question 9.

13 L'entropie échangée par le gaz et l'entropie créée sont :

☒ a. $S^e = -\frac{P_1 V_1}{T_1}$ ☐ b. $\Delta S = -\frac{P_1 V_1}{T_1} \ln 2$

☐ c. $S^c = \frac{P_1 V_1}{T_1}$ ☒ d. $S^c = \frac{P_1 V_1}{T_1} (1 - \ln 2)$

L'entropie échangée avec le thermostat est $S^e = \frac{Q}{T_1}$ soit $S^e = -\frac{P_1 V_1}{T_1}$. L'entropie créée est $S^c = \Delta S - S^e$ ce qui donne la réponse d. On vérifie que $S^c > 0$ car $\ln 2 < 1$ et donc la transformation est irréversible (en raison du changement brutal de pression).

Un résistor de résistance R et de volume V est parcouru par une intensité continue I et soumis à une tension continue E pendant Δt . Sa température est maintenue constante par contact avec un thermostat à T et sa capacité thermique est C . La pression extérieure est P .

14 L'entropie échangée avec le thermostat est :

☐ a. $S^e = \frac{EI\Delta t}{T}$ ☐ b. $S^e = 0$

☒ c. $S^e = -\frac{EI\Delta t}{T}$ ☐ d. $S^e = C \frac{\Delta t}{T}$

Le résistor est un corps solide donc l'énergie interne ne dépend que de T et $\Delta U = C\Delta T$ ce qui est nul dans le cas présent. Le travail reçu par le résistor est uniquement du travail électrique $W = EI\Delta t$. Puisque $\Delta U = 0$, le premier principe donne $Q = -W = -EI\Delta t$. On en déduit l'entropie échangée avec le thermostat à T : $S^e = \frac{Q}{T} = -\frac{EI\Delta t}{T}$.

15 La variation d'entropie du résistor est :

☒ a. $\Delta S = 0$ ☐ b. $\Delta S = -\frac{EI\Delta t}{T}$

☐ c. $\Delta S = \frac{EI\Delta t}{T}$ ☐ d. $\Delta S = \frac{PV}{(\gamma - 1)T} \ln PV^\gamma$

L'identité thermodynamique pour un corps solide est $dS = C \frac{dT}{T}$, or ici la température est constante donc la variation de S est nulle.

16 L'entropie créée est :

☐ a. $S^c = 0$ ☒ b. $S^c = -S^e$

☒ c. $S^c = \frac{EI\Delta t}{T}$ ☐ d. $S^c = -\frac{EI\Delta t}{T}$

L'entropie créée est $S^c = \Delta S - S^e = -S^e$. L'entropie créée est strictement positive, donc la transformation est irréversible. La cause d'irréversibilité est l'effet Joule.

24 Changements d'état

VRAI/FAUX

1 Généralités

☐ V ☒ F a. Un changement d'état ne peut avoir lieu qu'à pression et température constantes.

Il faut que l'une des variables P ou T soit maintenue constante pour que l'autre le soit aussi. Par exemple dans une turbine, un gaz qui se détend peut se condenser en partie (apparition de gouttelettes sur les pales de la turbine).

☒ V ☐ F b. Un changement d'état à pression et température constante est réversible.

Il s'agit effectivement d'une transformation réelle réversible.

☒ V ☐ F c. Le point triple de l'eau est à $0,01^\circ\text{C}$.

Il s'agit du point fixe utilisé pour l'échelle Kelvin. On rappelle que pour un point triple P et T sont fixées. La pression pour ce point triple est $6 \cdot 10^{-2}$ bar.

☐ V ☒ F d. Sous pression atmosphérique normale, l'eau peut bouillir à 200°C .

Sous pression atmosphérique normale, l'eau bout à 100°C , donc on ne peut pas avoir un mélange liquide-vapeur ayant une température supérieure à 100°C .

☒ V ☐ F e. L'eau peut s'évaporer en dessous de 100°C .

Si la pression est inférieure à 1,013 bar l'eau se vaporise à une température inférieure à 100°C . Dans le cas de l'atmosphère, c'est la pression partielle en vapeur d'eau qui est importante. Lorsque l'air n'est pas sursaturé en eau, l'eau s'évapore à température ambiante (c'est pour cela que le linge sèche).

☒ V ☐ F f. En montagne, l'eau bout à plus basse température qu'au niveau de la mer.

En altitude, la pression est inférieure à celle du niveau de la mer, donc la température d'ébullition diminue.

QCM

2 Un calorimètre dont on négligera la valeur en eau, contient $m_l = 100$ g d'eau liquide à 20°C . On ajoute une masse $m_g = 30$ g de glace à 0°C . Quel est l'état final sachant qu'on opère à pression atmosphérique normale ? On donne les capacités massiques de l'eau liquide $c_l = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, de la glace $c_g = 2,1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et l'enthalpie de fusion à 0°C $L_f = 333 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

☐ a. Tout est liquide à 270 K . ☒ b. Il y a équilibre à 273 K .

☐ c. Tout est solide à 349 K . ☒ d. La masse de glace fondue est $25,2 \text{ g}$.

On fait l'hypothèse que la glace est entièrement fondue. Le système est la masse m_l de liquide et la masse m_g de glace. Le calorimètre est isolé et l'évolution étant isobare $\Delta H = Q = 0$. Comme il n'apparaît que des différences de températures dans les calculs, on peut utiliser des températures en degrés Celsius. On note θ_f la température finale et θ_l la température initiale du liquide.

La variation d'enthalpie de m_l correspond uniquement à une variation de température soit $\Delta H_l = m_l c_l (\theta_f - \theta_l)$. Pour m_g , il y a une fusion totale à 0°C puis un échauffement (du liquide) jusqu'à θ_f , soit $\Delta H_g = m_g L_f + m_g c_l (\theta_f - 0)$. Puisque $\Delta H = \Delta H_l + \Delta H_g$, on en déduit $\theta_f = \frac{m_l c_l \theta_l - m_g L_f}{(m_g + m_l) c_l}$. L'application numérique donne $\theta_f = -3^\circ\text{C}$, ou 270 K . Cette température est inférieure à 0°C , donc sous pression atmosphérique normale, l'eau n'est pas stable sous forme liquide. Cette solution ne convient pas.

On aurait pu faire l'hypothèse de tout en glace, il faut dans ce cas refroidir l'eau liquide à 0°C , la solidifier et faire varier la température de toute la masse $m_l + m_g$ alors en glace. On trouve alors une température supérieure à 0°C , cette solution ne convient pas non plus.

Il reste l'équilibre à 0°C . On suppose qu'une masse m de glace fonde soit $\Delta H_g = m L_f$, il faut refroidir le liquide à 0°C soit $\Delta H_l = m_l c_l (0 - \theta_l)$. La relation $\Delta H = 0$ donne alors $m = 25,2\text{ g}$ ce qui est bien inférieur à m_g .

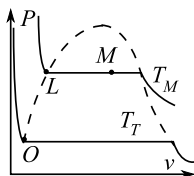
3

On considère une enceinte indéformable, initialement vide, de volume 1 L , maintenue à 325 K . On met dans cette enceinte 1 g d'eau. La pression de vapeur saturante à cette température est $0,133\text{ bar}$. On considérera la vapeur comme un gaz parfait. Constante des gaz parfaits : $R = 8,31\text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$. Masse molaire de l'eau $M = 18\text{ g}$.

- ☐ a. Tout est vaporisé à $1,5 \cdot 10^5\text{ Pa}$.
- ☐ b. Tout est liquide.
- ☒ c. $8,9 \cdot 10^{-2}\text{ g}$ de gaz et $0,91\text{ g}$ de liquide.
- ☒ d. $4,9 \cdot 10^{-3}\text{ mol}$ de gaz et $5 \cdot 10^{-2}\text{ mol}$ de liquide.

On suppose d'abord que toute l'eau est sous forme de vapeur et on calcule la pression avec l'équation des gaz parfaits : $P = \frac{mRT}{MV}$ en faisant attention aux unités soit $P = \frac{1 \times 8,31 \times 325}{18 \times 0,001}$. On trouve $P = 1,5 \cdot 10^5\text{ Pa}$, ce qui est supérieur à la pression de vapeur saturante. L'eau ne peut pas être totalement vaporisée. Elle ne peut pas être non plus totalement liquide, car elle occuperait un volume de 1 mL et laisserait le reste du volume vide. On a donc un équilibre liquide-vapeur, la vapeur étant à la pression de vapeur saturante. Si l'on néglige le volume de l'eau liquide (au maximum 1 mL très petit devant 1 L), on obtient le nombre de moles de vapeur par l'équation des gaz parfaits $n = \frac{0,133 \cdot 10^5 \times 0,001}{8,31 \times 325}$, ce qui donne $4,9 \cdot 10^{-3}\text{ mol}$ de vapeur, soit $8,9 \cdot 10^{-2}\text{ g}$ et par différence $0,91\text{ g}$ de liquide soit $5 \cdot 10^{-2}\text{ mol}$.

- 4** On donne la courbe de saturation pour un mélange liquide-vapeur avec deux isothermes l'une à la température triple T_T , l'autre à une température T_M . On note L_v l'enthalpie massique de vaporisation à la température T_M et C_l la capacité thermique massique du liquide seul. On considère une masse totale m .



On note H_0 l'enthalpie au point O . Déterminer l'enthalpie au point M de titre massique en vapeur x_v .

- ☒ a. $H = H_0 + m(C_l(T_M - T_T) + x_v L_v)$ ☐ b. $H = H_0 + m(C_l(T_M - T_T) + L_v)$
☐ c. $H = H_0 + mL_v$ ☐ d. $H = H_0 + mx_v L_v$

L'enthalpie est une fonction d'état, donc on choisit le chemin que l'on veut pour la calculer. De O à L , il y a échauffement du liquide seul donc $\Delta H_{OL} = mC_l(T_M - T_T)$, puis de L à M , il y a vaporisation isotherme isobare d'une quantité mx_v , d'où $\Delta H_{LM} = mx_v L_v$. Or $H = H_0 + \Delta H_{OL} + \Delta H_{LM}$, d'où le résultat a.

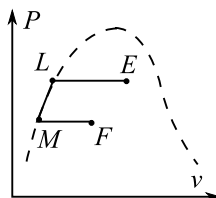
- 5** Avec les mêmes hypothèses que la question précédente, déterminer l'entropie S en M . On note S_0 l'entropie en O .

- ☐ a. $S = S_0 + m\left(C_l \ln \frac{T_M}{T_T} + \frac{L_v}{T_M}\right)$ ☐ b. $S = S_0 + m\left(C_l \frac{T_M - T_T}{T_M} + \frac{x_v L_v}{T_M}\right)$
☒ c. $S = S_0 + m\left(C_l \ln \frac{T_M}{T_T} + \frac{x_v L_v}{T_M}\right)$ ☐ d. $S = S_0 + m \frac{x_v L_v}{T_M}$

Le raisonnement est le même que pour H . De O à L , il y a échauffement du liquide seul donc l'identité thermodynamique pour un liquide $dS = mC_l \frac{dT}{T}$ conduit par intégration entre T_T et T_M à $\Delta S_{OL} = mC_l \ln \frac{T_M}{T_T}$, puis de L à M , il y a vaporisation isobare isotherme réversible d'une quantité mx_v , d'où $\Delta S_{LM} = \frac{mx_v L_v}{T_M}$. Or $S = S_0 + \Delta S_{OL} + \Delta S_{LM}$, d'où le résultat c.

- 6** On considère une masse m d'un corps en équilibre liquide-vapeur (fraction massique x_v de vapeur) à la température T_1 . Ce corps subit une détente isenthalpique jusqu'à la température T_0 . Déterminer la fraction de vapeur x'_v dans l'état final. On note C_l la capacité thermique massique du liquide seul et l'enthalpie massique de vaporisation est $L_v = A - BT$ où A et B sont des constantes.

- ☐ a. $x'_v = \frac{-x_v(A - BT_1) + C_l(T_1 - T_0)}{A - BT_0}$ ☐ b. $x'_v = x_v \frac{A - BT_1}{A - BT_0}$
☐ c. $x'_v = x_v$ ☒ d. $x'_v = \frac{x_v(A - BT_1) + C_l(T_1 - T_0)}{A - BT_0}$



L'enthalpie étant une fonction d'état, on peut choisir le chemin que l'on veut pour aller de l'état initial E à l'état final F , en passant par la courbe d'ébullition. De E à L , on assiste à une liquéfaction totale de la quantité mx_v à T_1 donc $\Delta H_{EL} = -mx_v(A - BT_1)$. De L à M , on assiste à un refroidissement du liquide seul, soit $\Delta H_{LM} = mC_l(T_0 - T_1)$. Enfin, de M à F , il y a vaporisation de la quantité mx'_v à la température T_0 , soit $\Delta H_{MF} = mx'_v(A - BT_0)$. Ainsi, en écrivant $\Delta H_{EF} = \Delta H_{EL} + \Delta H_{LM} + \Delta H_{MF} = 0$, on trouve $x'_v = \frac{x_v(A - BT_1) + C_l(T_1 - T_0)}{A - BT_0}$.

- 7** Une masse m de vapeur juste saturante à la température T est transformée en un mélange liquide-vapeur, de fraction massique en liquide x_l , à la même température. Déterminer la variation d'énergie interne de ce système. On note v_l et v_v respectivement les volumes massiques du liquide et du gaz saturants seuls, P_s la pression de vapeur saturante à T et L_v l'enthalpie massique de vaporisation à cette même température.

- ☒ a. $\Delta U = -m(x_l L_v + P_s x_l (v_l - v_v))$ ☐ b. $\Delta U = -mx_l L_v$
☐ c. $\Delta U = -m(L_v + P_s (v_l - v_v))$ ☐ d. $\Delta U = -P_s x_l (v_l - v_v)$

On utilise la relation $\Delta U = \Delta H - \Delta(PV)$. La condensation partielle se fait à pression constante P_s puisque la température est constante. On a donc condensation d'une masse mx_l soit $\Delta H = -mx_l L_v$. Le volume initial (uniquement du gaz) est $V_i = mv_v$, et le volume final $V_f = mx_l v_l + m(1 - x_l)v_v$ soit avec $\Delta(PV) = P_s(V_f - V_i)$, on obtient $\Delta U = -mx_l L_v - mP_s x_l (v_l - v_v)$.

- 8** Une enceinte indéformable est contact avec un thermostat à température T . Dans cette enceinte initialement vide, on injecte une masse m de liquide juste saturant. Le volume de l'enceinte est juste suffisant pour que la vaporisation soit complète. On note v_l et v_v respectivement les volumes massiques du liquide et du gaz saturants seuls, P_s la pression de vapeur saturante à T et L_v l'enthalpie massique de vaporisation à cette même température. Déterminer la chaleur reçue par m .

- ☐ a. $Q = mL_v$ ☐ b. $Q = -mL_v - mP_s (v_l - v_v)$
☒ c. $Q = mL_v + mP_s (v_l - v_v)$ ☐ d. $Q = 0$

L'enceinte est indéformable donc le travail reçu est nul, ainsi le premier principe s'écrit $\Delta U = Q$.



Attention ici, $\Delta H \neq Q$ car la pression n'est pas constante au cours de la transformation.

L'état initial est au croisement de l'isotherme T et de la courbe d'ébullition soit (P_s, mv_l, T) , l'état final est au croisement de l'isotherme T et de la courbe de rosée soit (P_s, mv_v, T) . On calcule ΔU comme précédemment avec ici $\Delta H = mL_v$ puisqu'il s'agit d'une vaporisation totale. Le volume initial est ici $V_i = mv_l$ et le volume final $V_f = mv_v$ ce qui donne finalement $\Delta U = mL_v + mP_s(v_l - v_v)$, d'où Q . On remarque bien sûr que la variation d'énergie interne est la même que si on avait eu une transformation à pression et température constantes, ce qui n'est pas le cas pour Q .

9 Sur le cas précédent, déterminer l'entropie échangée S^e et l'entropie créée S^c .

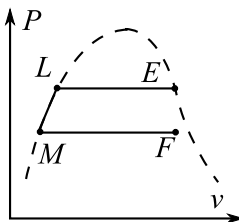
☐ a. $S^e = \frac{mL_v}{T}$ ☒ b. $S^e = \frac{m(L_v + P_s(v_l - v_v))}{T}$
☐ c. $S^c = 0$ ☒ d. $S^c = \frac{mP_s(v_v - v_l)}{T}$

L'entropie échangée avec le thermostat à température constante T est $S^e = \frac{Q}{T} = \frac{m(L_v + P_s(v_l - v_v))}{T}$. On calcule la variation d'entropie connaissant l'état initial et l'état final (voir question précédente) : il y a vaporisation totale à T soit $\Delta S = \frac{mL_v}{T}$. On en déduit $S^c = \Delta S - S^e$, soit $S^c = -\frac{mP_s(v_l - v_v)}{T}$ qui est strictement positive car $v_l < v_v$.

10 Une masse m de vapeur juste saturante à la température T_1 subit une détente adiabatique réversible dans une turbine jusqu'à la température T_2 . Déterminer la fraction massique x_{v2} de vapeur dans l'état final. On note L_{v1} et L_{v2} les enthalpies massiques de vaporisation aux températures T_1 et T_2 , et c_l la capacité thermique massique du liquide seul.

☒ a. $x_{v2} = \frac{T_2}{L_{v2}} \left(\frac{L_{v1}}{T_1} - c_l \ln \frac{T_2}{T_1} \right)$ ☐ b. $x_{v2} = \frac{T_2}{T_1} \frac{L_{v1}}{L_{v2}}$
☐ c. $x_{v2} = \frac{T_2}{L_{v2}} \left(\frac{L_{v1}}{T_1} - c_l \frac{T_2 - T_1}{T_1} \right)$ ☒ d. $x_{v2} = \frac{T_2}{L_{v2}} \left(\frac{L_{v1}}{T_1} - c_l \frac{T_2 - T_1}{T_2} \right)$

Une évolution adiabatique réversible est isentropique. L'entropie étant une fonction d'état, on peut choisir le chemin pour aller de l'état initial E à l'état final F , en passant par la courbe d'ébullition (on ne passe pas par la courbe de rosée car on ne connaît pas la capacité thermique du gaz saturant).



De E à L , on assiste à une liquéfaction totale de la quantité m à T_1 donc $\Delta S_{EL} = -\frac{mL_{v1}}{T_1}$.

De L à M , on assiste à un refroidissement du liquide seul, soit $\Delta S_{LM} = mc_l \ln \frac{T_2}{T_1}$. Enfin, de

M à F , il y a vaporisation de la quantité mx_{v2} à la température T_2 , soit $\Delta S_{MF} = \frac{mx_{v2}L_{v2}}{T_2}$.

Ainsi, en écrivant $\Delta S_{EF} = \Delta S_{EL} + \Delta S_{LM} + \Delta S_{MF} = 0$, on trouve $x_{v2} = \frac{T_2}{L_{v2}} \left(\frac{L_{v1}}{T_1} - c_l \ln \frac{T_2}{T_1} \right)$.

- 11** Une masse m d'eau liquide juste saturante est dans une enceinte adiabatique fermée par un piston en contact avec l'atmosphère à pression P_0 . On suppose qu'il n'y a aucune vapeur dans l'état initial. On chauffe l'eau avec une résistance R parcourue par une intensité I et on néglige la dilatation de l'eau liquide. Déterminer le temps Δt nécessaire à la vaporisation complète et le travail W reçu par l'eau. On note v_l et v_v respectivement les volumes massiques du liquide et du gaz saturants seuls, L_v l'enthalpie massique de vaporisation.

☐ a. $\Delta t = \frac{mP_0(v_v - v_l)}{RI^2}$ ☒ b. $\Delta t = \frac{mL_v}{RI^2}$

☒ c. $W = -mP_0(v_v - v_l)$ ☐ d. $W = mP_0(v_v - v_l)$

La vaporisation a lieu à pression constante P_0 (assurée par le piston) et donc à température constante. L'eau étant initialement saturante, elle est à la température de vaporisation. Pour l'eau, on peut écrire $\Delta H = Q = mL_v$. Puisque les parois sont adiabatiques, la chaleur provient de la résistance (effet Joule) soit $Q = RI^2\Delta t$, d'où $\Delta t = \frac{mL_v}{RI^2}$. Le travail des forces de pressions est $W = -\int P_0 dV$ soit $W = -mP_0(v_v - v_l)$. On retrouve bien $\Delta U = Q + W = \Delta H - \Delta(PV)$.

25 Machines thermiques

VRAI/FAUX

1 Généralités

☒ V ☐ F a. Une machine monotherme ne peut pas produire de travail.

C'est le théorème de Carnot. La relation de Clausius donne $Q/T_s \leq 0$ où T_s est la température de la source. Donc $Q \leq 0$. Le premier principe sur un nombre entier de cycles donne $\Delta U = 0 = W + Q$; on en déduit $W \geq 0$.

☐ V ☒ F b. Une installation de chauffage est forcément une machine au moins di-therme.

D'après le raisonnement précédent, pour une machine monotherme $Q \leq 0$, donc elle peut servir de chauffage. Elle est cependant beaucoup moins performante qu'une pompe à chaleur ditherme car son efficacité est 1.

☒ V ☐ F c. Dans une machine frigorifique, le fluide caloporteur est en contact avec la source froide lors de l'évaporation.

Une machine frigorifique fonctionne de manière à effectuer un transfert de chaleur dans le sens opposé au sens spontané, donc de la source froide vers la source chaude. Ainsi le fluide caloporteur prend de la chaleur à la source froide grâce à sa vaporisation.

☐ V ☒ F d. Pour une pompe à chaleur le système cède de la chaleur à la source froide.

Une pompe à chaleur fonctionne pour les transferts de chaleur dans le même sens qu'une machine frigorifique donc elle reçoit effectivement de la chaleur de la source froide et en cède effectivement à la source chaude.

QCM

Toutes les machines étudiées fonctionnent de manière cyclique.

2 Un système (S) est en contact avec un thermostat à la température T_1 et fonctionne selon des cycles. Quelles sont les relations vérifiées par le travail W reçu par (S) :

- ☒ a. $W \geq 0$ ☒ b. $W = -Q$
☐ c. $W < 0$ ☐ d. $W = 0$

Avec le premier principe $\Delta U = W + Q$, or le système fonctionne selon des cycles donc sur un nombre entier de cycles $\Delta U = 0$ et $W = -Q$. L'inégalité de Clausius entraîne $\frac{Q}{T_1} \leq 0$ donc $Q \leq 0$ et $W \geq 0$.

3 Un moteur ditherme est en contact avec une source froide à température T_f dont il reçoit la chaleur Q_f et une source chaude à température T_c dont il reçoit la chaleur Q_c . Il reçoit un travail W . Déterminer les réponses justes parmi les propositions suivantes :

- ☐ a. $W \geq 0$ ☒ b. $Q_c > 0$
☒ c. $Q_f < 0$ ☐ d. $Q_c < 0$

Un moteur fournit du travail à l'extérieur donc le travail reçu W est négatif. Il reçoit de la chaleur de la source chaude ($Q_c > 0$) et en fournit à la source froide ($Q_f < 0$), avec $|Q_c| > |Q_f|$, la différence étant transformée en travail.

4 Une machine frigorifique ditherme est en contact avec une source froide à température T_f dont elle reçoit la chaleur Q_f et une source chaude à température T_c dont elle reçoit la chaleur Q_c . Elle reçoit un travail W . Déterminer les réponses justes parmi les propositions suivantes :

- ☐ a. $W < 0$ ☒ b. $W > 0$
☐ c. $Q_f < 0$ ☒ d. $Q_c < 0$

Une machine frigorifique reçoit du travail (en général électrique) pour effectuer un transfert de chaleur contraire au transfert spontané, de la source chaude vers la source froide. Elle « prend » donc de la chaleur à la source froide pour la transférer à la source chaude. Donc $W > 0$, $Q_C < 0$ et $Q_f > 0$. Ces dernières grandeurs ont les mêmes signes pour une pompe à chaleur.

- 5** Une machine frigorifique ditherme fonctionnant selon des cycles est en contact avec une source froide à température T_f dont elle reçoit la chaleur Q_f et une source chaude à température T_C dont elle reçoit la chaleur Q_C . Elle reçoit un travail W . On note η son efficacité. Déterminer les réponses justes parmi les propositions suivantes :

☐ a. $\eta = \left(1 + \frac{Q_f}{Q_C}\right)^{-1}$ ☒ b. $\eta = -\left(1 + \frac{Q_C}{Q_f}\right)^{-1}$

☐ c. $\eta = -\left(1 + \frac{Q_C}{Q_f}\right)$ ☐ d. $\eta = \left(1 + \frac{Q_f}{Q_C}\right)$

De manière générale le rendement ou l'efficacité sont déterminés par le rapport $\left| \frac{\text{grandeur intéressante}}{\text{grandeur onéreuse}} \right|$, soit ici $\eta = \left| \frac{Q_f}{W} \right| = \frac{Q_f}{W}$. D'après le premier principe sur un nombre entier de cycles $\Delta U = 0$ et $\Delta U = W + Q_f + Q_C$ d'où $\eta = -\left(1 + \frac{Q_C}{Q_f}\right)^{-1}$

- 6** Pour une pompe à chaleur ditherme, fonctionnant selon des cycles entre une source chaude à T_C et une source froide à T_f , l'efficacité vérifie :

☐ a. $\eta \leq 1 - \frac{T_f}{T_C}$ ☐ b. $\eta \leq \frac{T_f}{T_C - T_f}$

☐ c. $\eta \leq \frac{T_C}{T_f} - 1$ ☒ d. $\eta \leq \frac{T_C}{T_C - T_f}$

Pour une pompe à chaleur $\eta = \left| \frac{Q_C}{W} \right| = -\frac{Q_C}{W}$ puisque $Q_C < 0$ et $W > 0$. Le premier principe s'écrit $\Delta U = W + Q_f + Q_C$, or sur un nombre entier de cycles $\Delta U = 0$, d'où $\eta = \left(1 + \frac{Q_f}{Q_C}\right)^{-1}$. Avec la relation de Clausius $\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0$, on démontre $1 + \frac{Q_f}{Q_C} \geq 1 - \frac{T_f}{T_C}$ soit $\eta \leq \left(1 - \frac{T_f}{T_C}\right)^{-1}$.

- 7** On considère un moteur ditherme, fonctionnant selon des cycles entre une source chaude à T_C et une source froide à T_f . On note S^c , l'entropie créée. Le rendement vérifie :

☐ a. $\eta = 1 - \frac{T_f}{T_C} + S^c \frac{T_f}{Q_C}$ ☐ b. $\eta = 1 - \frac{T_f}{T_C}$

☐ c. $\eta = 1 - \frac{Q_f}{Q_C} - S^c \frac{T_f}{Q_C}$ ☒ d. $\eta = 1 - \frac{T_f}{T_C} - S^c \frac{T_f}{Q_C}$

Pour un moteur, le rendement est $\eta = \left| \frac{W}{Q_C} \right| = -\frac{W}{Q_C}$. Sur un nombre entier de cycles, $\Delta S = 0$ avec $\Delta S = S^e + S^c$ et $S^e = \frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_C}{T_C}$. D'autre part, sur un nombre entier de cycles $\Delta U = 0 = W + Q_C + Q_f$, donc $\eta = 1 + \frac{Q_f}{Q_C}$. En combinant ces différentes relations, on trouve $\frac{Q_f}{Q_C} = -\frac{T_f}{T_C} - S^c \frac{T_f}{Q_C}$ et $\eta = 1 - \frac{T_f}{T_C} - S^c \frac{T_f}{Q_C}$, donc $\eta \leq 1 - \frac{T_f}{T_C}$.

- 8** Une pompe à chaleur ditherme fonctionne suivant des cycles, entre une source froide à température constante T_1 et une source chaude de capacité thermique C dont la température T_2 varie de T_{2i} à T_{2f} . Déterminer le travail minimum à fournir à la pompe.

☐ a. $W_{\min} = -C(T_{2f} - T_{2i}) + CT_1 \ln \frac{T_{2f}}{T_{2i}}$ ☐ b. $W_{\min} = Q_2 \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right)$
☒ c. $W_{\min} = C(T_{2f} - T_{2i}) - CT_1 \ln \frac{T_{2f}}{T_{2i}}$ ☐ d. $W_{\min} = C(T_{2f} - T_{2i}) \left(1 - \frac{T_1}{T_2} \right)$

Sur un nombre entier de cycles, le premier principe pour le fluide de la pompe, s'écrit $\Delta U = W + Q_1 + Q_2$. Pour la source (2), le premier principe s'écrit $\Delta U_2 = C(T_{2f} - T_{2i}) = -Q_2$; il faut en effet prendre garde aux orientations, car Q_2 est la chaleur fournie par la source à la pompe, d'où le signe moins. Le deuxième principe pour la pompe s'écrit $\Delta S = 0 = S^e + S^c$

avec ici $S^e = \frac{Q_1}{T_1} + \int_{T_{2i}}^{T_{2f}} \frac{\delta Q_2}{T_2}$. Avec le premier principe appliqué à la source (2), l'intégrale

s'écrit $\int_{T_{2i}}^{T_{2f}} \frac{-C dT_2}{T_2} = -C \ln \frac{T_{2f}}{T_{2i}}$. En éliminant Q_1 , on trouve $W = T_1 S^c + C(T_{2f} - T_{2i}) - CT_1 \ln \frac{T_{2f}}{T_{2i}}$. Étant donné que $S^c \geq 0$, on trouve $W \geq C(T_{2f} - T_{2i}) - CT_1 \ln \frac{T_{2f}}{T_{2i}}$, et donc le

travail minimum est obtenu dans le cas réversible et $W_{\min} = C(T_{2f} - T_{2i}) - CT_1 \ln \frac{T_{2f}}{T_{2i}}$.

- 9** Un moteur fonctionne suivant des cycles entre deux sources de capacités C , la source froide (1) a une température initiale T_{1i} et la source chaude (2) a une température initiale T_{2i} . Quelles sont les relations vérifiées par les températures finales T_{f1} et T_{f2} ?

☐ a. $T_{f1} = T_{1i}$ et $T_{f2} = T_{2i}$ ☒ b. $T_{f1} = T_{f2}$
☐ c. $T_{f2} \leq \sqrt{T_{1i} T_{2i}}$ ☒ d. $T_{f1} \geq \sqrt{T_{1i} T_{2i}}$

Le système ne peut fonctionner en moteur que si les températures des deux sources sont différentes (théorème de Carnot : le moteur monotherme n'existe pas). Dans un moteur la source chaude fournit effectivement de la chaleur, donc si elle n'est pas parfaite, sa température T_2 diminue. À l'opposé, la source froide reçoit effectivement de la chaleur,

donc si elle n'est pas parfaite, sa température T_1 augmente. Dans ce cas le moteur s'arrêtera lorsque $T_1 = T_2$, on note T_f cette température commune finale. L'entropie échangée par le

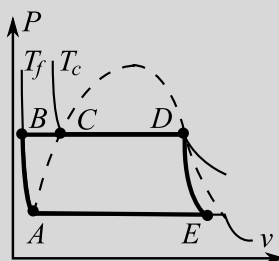
moteur avec les sources est donc $S^e = \int_{T_{i1}}^{T_f} \frac{\delta Q_1}{T_1} + \int_{T_{i2}}^{T_f} \frac{\delta Q_2}{T_2}$, or le premier principe appliqué aux deux sources s'écrit $\delta Q_1 = -CdT_1$ et $\delta Q_2 = -CdT_2$ (voir les conventions de signes dans la question précédente). Par intégration on trouve $S^e = -C \left(\ln \frac{T_f}{T_{i1}} + \ln \frac{T_f}{T_{i2}} \right)$. Sur un nombre entier de cycles, le deuxième principe s'écrit $\Delta S = 0 = S^e + S^c$, donc avec $S^c \geq 0$, on obtient l'inégalité $\ln \frac{T_f^2}{T_{i1}T_{i2}} \geq 0$ ou $T_f \geq \sqrt{T_{i1}T_{i2}}$. Il y a égalité dans le cas réversible.

10 Déterminer le travail maximal que le moteur précédent peut fournir.

- ☐ a. $W_{max} = C \left(\sqrt{T_{i1}} - \sqrt{T_{i2}} \right)^2$ ☒ b. $W_{max} = -C \left(\sqrt{T_{i1}} - \sqrt{T_{i2}} \right)^2$
☐ c. $W_{max} = -C (T_{i2} - T_{i1})$ ☐ d. $W_{max} = C (T_{i2} - T_{i1})$

Le moteur fournira un travail maximum s'il fonctionne de manière réversible. Dans ce cas, d'après la question précédente $T_f = \sqrt{T_{i1}T_{i2}}$. Si on applique le premier principe sur un nombre entier de cycles $\Delta U = 0 = W_{max} + Q_1 + Q_2$, or $Q_1 = -C(T_f - T_{i1})$ et $Q_2 = -C(T_f - T_{i2})$ (pour les signes, on rappelle que l'orientation est « récepteur » pour le moteur et non pour les sources). On a donc :

$$W_{max} = -Q_1 - Q_2 = -C(-2T_f + T_{i1} + T_{i2}) = -C \left(\sqrt{T_{i1}} - \sqrt{T_{i2}} \right)^2.$$



Les questions suivantes étudient le fonctionnement d'une turbine fonctionnant suivant un cycle diphasé liquide-vapeur de Rankine décrit sur le diagramme de Clapeyron ci-dessus. Le cycle est ditherme entre une source froide à $T_f = 35^\circ\text{C}$ et une source chaude à $T_c = 285^\circ\text{C}$. On rappelle que pour un fluide en écoulement le premier principe s'écrit $\Delta H = W_{utile} + Q$. La courbe de saturation est représentée en pointillé.

Dans toute l'étude on raisonnera sur une masse $m = 1 \text{ kg}$. On rappelle que l'entropie massique d'un mélange diphasé est donnée par l'expression $S = c_l \ln T + xL_v(T)/T + \text{cte}$, où $c_l = 4,18 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ est la capacité thermique massique du liquide saturant ou non, x la fraction massique de vapeur et $L_v(T)$, l'enthalpie massique de vaporisation à la température T avec $L_v(T_f) = 2415 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $L_v(T_c) = 1508 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

- 11** En D , la vapeur est saturante seule. La détente DE est adiabatique réversible. Déterminer le titre massique x_E en vapeur en E .

☐ a. $x = c_l \frac{T_f}{L_v(T_f)} \ln \frac{T_c}{T_f}$ ☒ b. $x = \frac{T_f}{L_v(T_f)} \left(c_l \ln \frac{T_c}{T_f} + \frac{L_v(T_c)}{T_c} \right)$
☐ c. $x = 0,317$ ☒ d. $x = 0,661$

La détente est adiabatique réversible donc isentropique et $\Delta S_{DE} = 0$. On utilise l'expression de S donnée dans l'énoncé soit pour D , avec $x_D = 1$ $S_D = c_l \ln T_c + L_v(T_c)/T_c + \text{cte}$ et $S_E = c_l \ln T_f + xL_v(T_f)/T_f + \text{cte}$. L'égalité $S_D = S_E$ entraîne $x = \frac{T_f}{L_v(T_f)} \left(c_l \ln \frac{T_c}{T_f} + \frac{L_v(T_c)}{T_c} \right)$. L'application numérique donne $x = 0,661$.



Attention à prendre les températures en Kelvin.

- 12** On suppose que la compression AB est adiabatique. Déterminer les travaux utiles W_{AB} et W_{DE} reçus par le système dans les transformations AB et DE .

☒ a. $W_{AB} = 0$ ☐ b. $W_{AB} = 1045 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
☐ c. $W_{DE} = 954 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ ☒ d. $W_{DE} = -956 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

On applique le premier principe pour un fluide en écoulement $\Delta H = W_{\text{utile}} + Q$ avec dans les deux cas des transformations adiabatiques donc $Q = 0$. Pour la transformation AB , qui est de plus isotherme $\Delta H_{AB} = c_l(T_f - T_f) = 0$ donc $W_{AB} = 0$. Ce résultat peut paraître paradoxal, comprimer de l'eau sans fournir de travail : cela est dû au fait que l'on néglige la variation de volume du liquide. Pour l'autre transformation il faut exprimer H_E et H_D . Le raisonnement a été fait dans le chapitre 24 : $H_E = H_A + xL_v(T_f)$ et $H_D = H_A + c_l(T_c - T_f) + L_v(T_c)$ donc $W_{DE} = xL_v(T_f) - c_l(T_c - T_f) - L_v(T_c)$. L'application numérique donne $-956 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

- 13** La transformation BD a lieu dans une chaudière sans pièces mobiles. De même, dans le condenseur EA il n'y a aucune pièce mobile. Déterminer les chaleurs Q_c et Q_f reçues par le système respectivement de la source chaude et de la source froide.

☒ a. $Q_c = 2553 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ ☐ b. $Q_c = -2553 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
☒ c. $Q_f = -1597 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ ☐ d. $Q_f = 1597 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

Le contact avec la source chaude a lieu dans la chaudière (transformation BD). Il n'y a pas de pièces mobiles donc $W_{utile} = 0$. Ainsi on a $\Delta H_{BD} = Q_c$, avec $\Delta H_{BC} = c_l(T_c - T_f)$ et $\Delta H_{CD} = L_v(T_c)$ soit numériquement $Q_c = 2553 \text{ kJ.kg}^{-1}$. Pour EA , il n'y a pas non plus de pièces mobiles donc $\Delta H_{EA} = Q_f$ et $\Delta H_{EA} = -xL_v(T_f)$ soit numériquement $Q_f = -1597 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

- 14** Déterminer le rendement η de la machine thermique ainsi que le rendement de Carnot η_c correspondant.

☒ a. $\eta = 0,424$ ☐ b. $\eta = 0,596$

☒ c. $\eta_c = 0,448$ ☐ d. $\eta_c = 0,714$

Il s'agit d'une machine génératrice donc $\eta = -\frac{W}{Q_c}$, soit numériquement $\eta = 0,424$. Pour un moteur de Carnot réversible $\Delta U = 0 = W + Q_c + Q_f$ et $\frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} = 0$ soit $\eta_c = 1 - \frac{T_f}{T_c}$ et $\eta_c = 0,448$.



Attention à prendre les températures en Kelvin.

On trouve que $\eta < \eta_c$ ce qui est attendu.

- 15** Déterminer la ou les transformations non réversibles dans le cycle :

☐ a. compression AB ☒ b. chauffage BC

☐ c. vaporisation CD ☐ d. condensation EA

L'évaporation CD et la condensation EA ont lieu à températures et pressions constantes : elles sont réversibles. Par hypothèse, la détente DE est isentropique donc adiabatique réversible. La compression AB est supposée adiabatique donc l'entropie échangée est nulle et pour un liquide incompressible $\Delta S = c_l \ln \frac{T_{final}}{T_{initial}}$ donc ici $\Delta S = 0$ et donc l'entropie créée est aussi nulle. La seule transformation non réversible est l'échauffement du liquide BC .

Partie 5

Électromagnétisme

Distributions de charges – Champ électrostatique

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

- Les différentes répartitions de charges (volumique, surfacique, linéique).
- La loi de Coulomb.
- Les propriétés de symétrie et leur utilisation pour la détermination du champ.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication.

1 Invariances et symétries

- ☐ V ☐ F **a.** Le champ électrique créé par une distribution de charges possède les mêmes propriétés d'invariance et de symétrie que les charges.
- ☐ V ☐ F **b.** En tout point d'un plan de symétrie d'une distribution de charges, le champ électrique est perpendiculaire à ce plan.
- ☐ V ☐ F **c.** Une distribution de charges possédant un plan d'antisymétrie est forcément neutre électriquement.
- ☐ V ☐ F **d.** Le champ électrique créé par un système neutre électriquement est nul en tout point de l'espace.

Consignes

QCM

Il peut y avoir, pour certaines questions, deux propositions exactes.

- 2** Soit une distribution volumique de charges composée d'une charge ponctuelle $q = e$ située au point O et d'une densité volumique dépendant de la distance r au point O : $\rho(r) = -\frac{e}{4\pi ar^2} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$, e étant la charge élémentaire et a une constante positive. Déterminer la charge dq comprise entre deux sphères de rayons r et $r + dr$.

☐ a. $dq = -\frac{e}{3a} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) dr$ ☐ b. $dq = -\frac{er}{3a} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$

☐ c. $dq = -\frac{e}{a} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) dr$ ☐ d. $dq = -\frac{er}{a} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$

- 3** Déterminer la charge totale Q de la distribution décrite à la question 2.

☐ a. $Q = e$ ☐ b. $Q = 2e$ ☐ c. $Q = -e$ ☐ d. $Q = 0$

- 4** Soit une boule de centre O , de rayon R , chargée en volume avec une densité volumique uniforme ρ_0 pour $x > 0$ et une densité volumique uniforme $-\rho_0$ pour $x < 0$. Étudier les symétries de cette distribution.

☐ a. xOz est plan de symétrie. ☐ b. xOz est plan d'antisymétrie.

☐ c. yOz est plan de symétrie. ☐ d. yOz est plan d'antisymétrie.

- 5** Déterminer la direction du champ électrique créé par la distribution de la question 4 au centre de la boule.

☐ a. $\vec{E}(O)$ est parallèle à Ox . ☐ b. $\vec{E}(O)$ est parallèle à Oy .

☐ c. $\vec{E}(O)$ est parallèle à Oz . ☐ d. $\vec{E}(O)$ est nul.

- 6** Soit une distribution surfacique de charges telle que le plan $y = a$ porte une densité uniforme σ_0 et le plan $y = -a$ une densité uniforme $-\sigma_0$. Déterminer la direction du champ électrique au point M de coordonnées $(x = a, y = 0, z = -a)$.

☐ a. $\vec{E}(M)$ est parallèle à Ox . ☐ b. $\vec{E}(M)$ est parallèle à Oy .

☐ c. $\vec{E}(M)$ est parallèle à Oz . ☐ d. $\vec{E}(M)$ est nul.

- 7** Déterminer les plans de symétrie pour la distribution de charges constituée d'un anneau circulaire de centre O et de rayon R dans le plan xOy , portant une densité linéique uniforme $\lambda_0 > 0$. En déduire la direction du champ électrique en tout point M de l'axe Oz .

☐ a. $\vec{E}(M)$ est parallèle à Ox . ☐ b. $\vec{E}(M)$ est parallèle à Oy .

☐ c. $\vec{E}(M)$ est parallèle à Oz . ☐ d. $\vec{E}(M)$ est nul.

- 8** Déterminer la norme du champ électrique créé par l'anneau décrit à la question précédente en un point de l'axe de l'anneau situé à une distance D du plan de l'anneau.

☐ a. $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0 R}{2\varepsilon_0 (R^2 + D^2)}$
☐ b. $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0 R D}{2\varepsilon_0 (R^2 + D^2)^{3/2}}$
☐ c. $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0 D}{2\varepsilon_0 (R^2 + D^2)}$
☐ d. $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0}{2\varepsilon_0 \sqrt{R^2 + D^2}}$

- 9** Soit un disque de rayon R uniformément chargé en surface avec la densité uniforme $\sigma_0 > 0$. On considère ce disque comme une juxtaposition de rubans circulaires de centre O , de rayon $r \in [0, R]$ et de largeur dr . Déterminer le lien entre la densité linéique équivalente λ_0 portée par le ruban de rayon r et σ_0 .

☐ a. $\sigma_0 = \frac{\lambda_0}{dr}$
☐ b. $\sigma_0 = \frac{\lambda_0}{2\pi dr}$
☐ c. $\sigma_0 = \lambda_0 dr$
☐ d. $\sigma_0 = 2\pi\lambda_0 dr$

- 10** Dédurre des questions 8 et 9 la norme du champ électrique en un point de l'axe du disque situé à une distance D du plan du disque.

☐ a. $\|\vec{E}\| = \frac{\sigma_0 D}{2\varepsilon_0 \sqrt{R^2 + D^2}}$
☐ b. $\|\vec{E}\| = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{D}{\sqrt{R^2 + D^2}}\right)$
☐ c. $\|\vec{E}\| = \frac{\sigma_0 R}{2\varepsilon_0 \sqrt{R^2 + D^2}}$
☐ d. $\|\vec{E}\| = \frac{\sigma_0 R}{2\varepsilon_0 D}$

- 11** À partir du résultat de la question 10 déterminer la norme du champ électrique en un point situé à une distance D d'un plan infini uniformément chargé en surface avec une densité $\sigma_0 > 0$.

☐ a. $\|\vec{E}\| = \frac{\sigma_0}{4\varepsilon_0}$
☐ b. $\|\vec{E}\| = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}$
☐ c. $\|\vec{E}\| = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$
☐ d. $\|\vec{E}\| = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$

- 12** Déterminer en tout point de l'axe Ox la direction du champ créé par un fil infini confondu avec l'axe Oz portant une densité linéique uniforme λ_0 .

☐ a. $\vec{E}(O)$ est parallèle à Ox .
 ☐ b. $\vec{E}(O)$ est parallèle à Oy .
☐ c. $\vec{E}(O)$ est parallèle à Oz .
 ☐ d. $\vec{E}(O)$ est nul.

- 13** Déterminer en tout point de l'axe Ox la norme du champ créé par un fil infini confondu avec l'axe Oz portant une densité linéique uniforme λ_0 .

☐ a. $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 |x|}$ ☐ b. $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 |x|}$

☐ c. $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0}{\pi\epsilon_0 |x|}$ ☐ d. $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 |x|}$

- 14** Déterminer en tout point de l'axe Oy la direction du champ créé par un fil infini confondu avec l'axe Oz portant une densité linéique λ_0 pour $z > 0$ et $-\lambda_0$ pour $z < 0$.

☐ a. $\vec{E}(O)$ est parallèle à Ox . ☐ b. $\vec{E}(O)$ est parallèle à Oy .

☐ c. $\vec{E}(O)$ est parallèle à Oz . ☐ d. $\vec{E}(O)$ est nul.

- 15** Déterminer en tout point de l'axe Oy la norme du champ créé par un fil infini confondu avec l'axe Oz portant une densité linéique λ_0 pour $z > 0$ et $-\lambda_0$ pour $z < 0$.

☐ a. $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0}{\pi\epsilon_0 |y|}$ ☐ b. $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 |y|}$

☐ c. $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 |y|}$ ☐ d. $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 |y|}$

Voir corrigés page [294](#)

Flux et circulation du champ électrostatique

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

- Le potentiel électrostatique.
- Le théorème de Gauss.
- Leur application à la détermination du champ électrostatique.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication.

1 Propriétés du champ électrostatique

- ☐ V ☐ F **a.** La circulation du champ électrostatique ne dépend pas du chemin suivi entre deux points.
- ☐ V ☐ F **b.** Si on connaît l'expression du potentiel $V(z)$ en tout point de l'axe Oz , on peut en déduire le vecteur champ électrique en tout point de cet axe.
- ☐ V ☐ F **c.** Le flux du vecteur $\vec{E}$ à travers une surface fermée ne dépend que de la charge totale contenue à l'intérieur de cette surface, indépendamment de la position des charges.
- ☐ V ☐ F **d.** Si une distribution de charges est à symétrie sphérique de centre O , on peut calculer le champ $\vec{E}$ en tout point de l'espace comme si les charges étaient rassemblées au centre.

Consignes

QCM

Il peut y avoir, pour certaines questions, deux propositions exactes.

On choisira à chaque fois que c'est possible le potentiel nul à l'infini.

- 2** On considère une distribution de charges constituée d'un anneau circulaire de centre O et de rayon R dans le plan xOy , portant une charge totale Q répartie de façon uniforme. Déterminer le potentiel électrique au point M sur l'axe Oz .

☐ a. $V(M) = \frac{\lambda_0 R}{2\varepsilon_0 z_M}$

☐ b. $V(M) = \frac{\lambda_0 R}{2\varepsilon_0 |z_M|}$

☐ c. $V(M) = \frac{\lambda_0 R}{2\varepsilon_0 \sqrt{z_M^2 + R^2}}$

☐ d. $V(M) = \frac{\lambda_0 R^2}{2\varepsilon_0 (z_M^2 + R^2)}$

- 3** Peut-on déduire de la question précédente que le champ électrique sur l'axe Oz est colinéaire à Oz ? Utiliser le potentiel pour déterminer la norme du champ.

☐ a. Oui.

☐ b. Non.

☐ c. $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0 R}{2\varepsilon_0 z_M^2}$

☐ d. $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0 R |z|}{2\varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}$

- 4** On considère une distribution de charges constituée d'un disque de centre O et de rayon R dans le plan xOy , portant une charge totale Q répartie uniformément sur la surface du disque. Déterminer le potentiel électrique au point M sur l'axe Oz .

☐ a. $V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 OM}$

☐ b. $V(M) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 OM}$

☐ c. $V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{OM^2 + R^2}}$

☐ d. $V(M) = \frac{Q(\sqrt{OM^2 + R^2} - OM)}{2\pi R^2 \varepsilon_0}$

- 5** Déterminer la composante E_z du champ créé sur l'axe du disque de la question précédente, au point de coordonnées $(0, 0, R)$.

☐ a. $E_z = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

☐ b. $E_z = \frac{Q}{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 R^2}$

☐ c. $E_z = \frac{Q}{2\pi R^2 \varepsilon_0}$

☐ d. $E_z = \frac{Q}{2\pi R^2 \varepsilon_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$

- 6** Une sphère creuse de centre O et de rayon R est uniformément chargée en surface avec la densité $\sigma_0 > 0$. Déterminer en tout point M de l'espace tel que $OM = r$ la direction du champ électrique et en déduire la surface à choisir pour appliquer le théorème de Gauss.

☐ a. $\vec{E}$ est tangent à la sphère de centre O et de rayon r .

☐ b. $\vec{E}$ est perpendiculaire à la sphère de centre O et de rayon r .

☐ c. La surface de Gauss est une sphère de centre O et de rayon r .

☐ d. La surface de Gauss est une sphère de centre O et de rayon R .

- 7** Déterminer pour la distribution précédente la norme du champ électrique à l'intérieur (E_{int}) et à l'extérieur (E_{ext}) de la sphère.

☐ a. $E_{int} = 0$ ☐ b. $E_{int} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$
☐ c. $E_{ext} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$ ☐ d. $E_{ext} = \frac{\sigma_0 R^2}{\epsilon_0 r^2}$

- 8** Une boule de centre O et de rayon R est uniformément chargée en volume. La charge totale est égale à Q . Déterminer en fonction de $r = OM$ la norme du champ électrique à l'intérieur (E_{int}) et à l'extérieur (E_{ext}) de la boule.

☐ a. $E_{int} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ ☐ b. $E_{int} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
☐ c. $E_{ext} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ☐ d. $E_{ext} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$

- 9** Déterminer pour la distribution précédente le potentiel électrique en tout point de l'espace.

☐ a. $V_{int} = -\frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3}$ ☐ b. $V_{int} = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3}$
☐ c. $V_{ext} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ ☐ d. $V_{ext} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$

- 10** L'axe Oz est supposé uniformément chargé avec la densité linéique λ_0 . Déterminer en tout point de l'espace la direction du champ électrique.

☐ a. $\vec{E}$ est parallèle à Oz . ☐ b. $\vec{E}$ est radial.
☐ c. $\vec{E}$ est orthoradial. ☐ d. On ne peut pas prévoir la direction de $\vec{E}$.

- 11** Déterminer avec les hypothèses de la question **10** la norme du champ électrique et le potentiel en tout point M de l'espace situé à une distance r de l'axe Oz . On notera V_0 la valeur du potentiel à une distance R_0 de l'axe.

☐ a. $\|\vec{E}\| = \frac{|\lambda_0|}{2\pi\epsilon_0 r}$ ☐ b. $\|\vec{E}\| = \frac{|\lambda_0|}{4\pi\epsilon_0 r}$
☐ c. $V = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_0}{r}\right) + V_0$ ☐ d. $V = -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R_0}\right) + V_0$

- 12** Des charges sont uniformément réparties sur tout le plan xOy avec une densité surfacique σ_0 . Déterminer la direction du champ électrique en tout point de l'espace.

☐ a. $\vec{E}$ est parallèle à Ox . ☐ b. $\vec{E}$ est parallèle à Oy .
☐ c. $\vec{E}$ est parallèle à Oz . ☐ d. $\vec{E}$ est parallèle à $\vec{OM}$.

- 13** Déterminer la norme du champ électrique créé par la distribution de la question **12** en tout point de l'espace.

☐ a. $\|\vec{E}\| = \frac{|\sigma_0|}{\varepsilon_0}$ ☐ b. $\|\vec{E}\| = \frac{|\sigma_0|}{2\varepsilon_0}$

☐ c. $\|\vec{E}\| = \frac{|\sigma_0|}{4\varepsilon_0}$ ☐ d. $\|\vec{E}\| = \frac{|\sigma_0|}{6\varepsilon_0}$

- 14** Déterminer le potentiel électrique créé par la distribution de la question **12** en tout point de l'espace en prenant comme convention $V = 0$ sur le plan xOy .

☐ a. $V = -\frac{\sigma_0 |z|}{2\varepsilon_0}$ ☐ b. $V = \frac{\sigma_0 |z|}{2\varepsilon_0}$

☐ c. $V = -\frac{\sigma_0 |z|}{4\varepsilon_0}$ ☐ d. $V = \frac{\sigma_0 |z|}{4\varepsilon_0}$

Voir corrigés page 300

Mouvements de particules chargées

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

- Trajectoire d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme.
- Trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme.
- L'effet Hall (PTSI).
- Le calcul de résistance d'un conducteur (PTSI).

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication.

1 Généralités

- ☐ V ☐ F **a.** Une particule chargée peut augmenter sa vitesse grâce à un champ magnétique uniforme.
- ☐ V ☐ F **b.** Dans un champ électrique uniforme, la trajectoire d'une particule chargée est circulaire.
- ☐ V ☐ F **c.** Dans un champ électrique uniforme, la trajectoire d'une particule peut être rectiligne.
- ☐ V ☐ F **d.** Dans un champ magnétique uniforme, la trajectoire d'une particule peut être rectiligne.

Consignes

QCM

Il peut y avoir, pour certaines questions, deux propositions exactes.

Dans tout le chapitre on néglige la force de pesanteur.

Les questions 10, 11 et 12 sont uniquement au programme de PTSI.

5 Établir une équation différentielle uniquement pour x et une autre uniquement pour y .

☐ a. $\ddot{x} - \omega_c^2 x = 0$ ☐ b. $\ddot{x} + \omega_c^2 x = 0$

☐ c. $\ddot{y} + \omega_c^2 y = -v_0 \omega_c \cos \alpha$ ☐ d. $\ddot{y} + \omega_c^2 y = 0$

6 Déterminer l'équation de la trajectoire projetée dans le plan xOy .

☐ a. $x = \frac{v_0 \cos \alpha}{\omega_c} \cos \omega_c t$ ☐ b. $x = \frac{v_0 \cos \alpha}{\omega_c} \sin \omega_c t$

☐ c. $y = \frac{v_0 \cos \alpha}{\omega_c} (\cos \omega_c t - 1)$ ☐ d. $y = \frac{v_0 \cos \alpha}{\omega_c} \cos \omega_c t$

7 Une particule de charge $q > 0$ et masse m , située à l'origine O , a une vitesse initiale $\vec{v}_0$ selon Oz . Il règne dans cet espace un champ électrique $\vec{E} = E\vec{u}_x$, uniforme et un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_x$ uniforme. On pose $\omega_c = qB/m$. Écrire les équations différentielles du mouvement projetées sur les axes.

☐ a. $\begin{cases} m\ddot{x} = qE \\ m\ddot{y} = q\dot{z}B \\ m\ddot{z} = -q\dot{y}B \end{cases}$ ☐ b. $\begin{cases} m\ddot{x} = q(E + B) \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$

☐ c. $\begin{cases} m\ddot{x} = qE \\ m\ddot{y} = qv_0 B \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$ ☐ d. $\begin{cases} m\ddot{x} = q(E + v_0 B) \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$

8 On veut résoudre le système formé des équations en y et z par les complexes. On pose $\underline{C} = y + iz$. Déterminer l'équation différentielle en $\underline{C}$.

☐ a. $\ddot{\underline{C}} + i\omega_c \dot{\underline{C}} = 0$ ☐ b. $\ddot{\underline{C}} - i\omega_c \dot{\underline{C}} = 0$

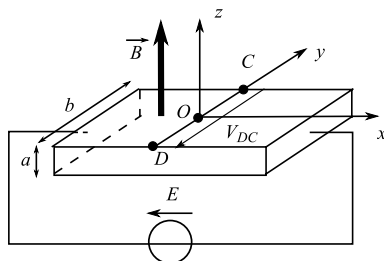
☐ c. $\ddot{\underline{C}} - \omega_c \dot{\underline{C}} = 0$ ☐ d. $\ddot{\underline{C}} = 0$

9 Déterminer les équations paramétriques du mouvement de la particule.

☐ a. $\begin{cases} x = qEt^2/2m \\ y = v_0(1 - \cos \omega_c t)/\omega_c \\ z = -v_0(\sin \omega_c t)/\omega_c \end{cases}$ ☐ b. $\begin{cases} x = qEt^2/2m \\ y = v_0(\cos \omega_c t - 1)/\omega_c \\ z = -v_0(\sin \omega_c t)/\omega_c \end{cases}$

☐ c. $\begin{cases} x = qEt^2/2m \\ y = v_0(\sin \omega_c t)/\omega_c \\ z = v_0(\cos \omega_c t - 1)/\omega_c \end{cases}$ ☐ d. $\begin{cases} x = qEt^2/2m \\ y = v_0(1 - \cos \omega_c t)/\omega_c \\ z = v_0(\sin \omega_c t)/\omega_c \end{cases}$

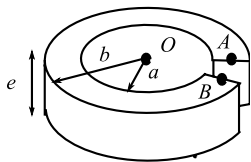
- 10** Une plaquette contenant n porteurs de charge libre par unité de volume de charge $q > 0$ est soumise à un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$. La plaquette est aussi branchée sur une f.e.m. E constante. On note I l'intensité circulant dans la plaquette en régime permanent. Les différentes autres grandeurs utiles sont définies sur le schéma. Déterminer le champ électrique $\vec{E}_H$ (champ de Hall) apparaissant selon Oy en régime permanent ainsi que la tension V_{DC} correspondante.



- ☐ a. $\vec{E}_H = \frac{IB}{nqab}\vec{u}_x$ ☐ b. $\vec{E}_H = \frac{IB}{nqab}\vec{u}_y$
☐ c. $V_{DC} = -\frac{IB}{nqa}$ ☐ d. $V_{DC} = \frac{IB}{nqa}$
- 11** Deux conducteurs cylindriques de rayons respectifs r_1 et $r_2 > r_1$, de hauteur h , sont séparés par un milieu de conductivité γ . On suppose les effets de bord négligeables. Déterminer la résistance R entre les deux cylindres.

- ☐ a. $R = \frac{1}{\gamma} \frac{r_2 - r_1}{2\pi r_1 h}$ ☐ b. $R = -\frac{1}{2\pi h \gamma} \ln \frac{r_2}{r_1}$
☐ c. $R = \frac{1}{2\pi h \gamma} \ln \frac{r_2}{r_1}$ ☐ d. $R = \frac{1}{\gamma} \frac{r_2 - r_1}{2\pi r_2 h}$

- 12** On considère le conducteur de la figure, de conductivité γ . On néglige l'épaisseur de la coupure entre A et B : les lignes de courants sont des cercles concentriques de centre O ($\vec{j} = j(r)\vec{u}_\theta$). Déterminer la conductance entre les faces A et B . On néglige tout effet de bord.



- ☐ a. $G = \frac{\gamma e}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$ ☐ b. $G = \gamma \frac{e(b-a)}{2\pi a}$
☐ c. $G = -\frac{\gamma e}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$ ☐ d. $G = \gamma \frac{e(b-a)}{2\pi b}$

Voir corrigés page 306

Champ magnétostatique

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

- Le champ magnétostatique.
- Les propriétés de symétrie.
- La loi de Biot et Savart.
- Le théorème d'Ampère.

Consignes

Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est exacte ou non, en rédigeant une courte explication.

1 Symétries

- ☐ V ☐ F a. Une spire circulaire de courant comporte une infinité de plans de symétrie.
- ☐ V ☐ F b. Un plan de symétrie des courants est plan d'antisymétrie du champ magnétique.
- ☐ V ☐ F c. Le champ magnétique est perpendiculaire aux plans de symétrie d'une distribution de courants.

2 Flux et circulation

- ☐ V ☐ F a. Le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est égal à la somme algébrique des courants intérieurs multipliée par μ_0 .
- ☐ V ☐ F b. La circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé est égale à la somme algébrique des courants traversant le contour multipliée par μ_0 .

Consignes

QCM

Il peut y avoir, pour certaines questions, deux propositions exactes.

- 3** On considère une spire circulaire d'axe Oz parcourue par un courant d'intensité I . Étudier les symétries de la distribution de courant et en déduire la direction du champ magnétique sur l'axe de la spire.

- ☐ a. xOz est plan de symétrie. ☐ b. yOz est plan d'antisymétrie.
☐ c. $\vec{B}$ est parallèle à Oz . ☐ d. $\vec{B}$ est perpendiculaire à Oz .

- 4** Calculer la norme du champ magnétique sur l'axe d'une spire circulaire de rayon R , parcourue par un courant d'intensité I , à une distance D du centre de la spire.

- ☐ a. $\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 DI}{2(R^2 + D^2)}$ ☐ b. $\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 ID^2}{2(R^2 + D^2)^{3/2}}$
☐ c. $\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 RI}{2(R^2 + D^2)}$ ☐ d. $\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + D^2)^{3/2}}$

- 5** Soit un segment de conducteur filiforme de longueur L , colinéaire à l'axe Oz , parcouru par un courant d'intensité I . Déterminer la direction du champ magnétique au point M du plan médiateur du segment.

- ☐ a. $\vec{B}$ est radial. ☐ b. $\vec{B}$ est orthoradial.
☐ c. $\vec{B}$ est parallèle à Oz . ☐ d. On ne peut pas prévoir la direction de $\vec{B}$.

- 6** Déterminer pour la distribution de courants de la question 7 la norme du champ magnétique au point M du plan médiateur à une distance D du segment.

- ☐ a. $B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi D} \frac{L}{\sqrt{4D^2 + L^2}}$ ☐ b. $B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi D} \frac{L}{\sqrt{D^2 + L^2}}$
☐ c. $B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi D}$ ☐ d. $B_\theta = \frac{\mu_0 IL}{2\pi D^2}$

7 On considère un fil infini colinéaire à l'axe Oz , parcouru par un courant d'intensité I orienté dans le même sens que l'axe. On souhaite déterminer le champ magnétique en tout point M du plan xOy . Quel contour est-il judicieux d'utiliser pour appliquer le théorème d'Ampère ?

- ☐ a. carré de centre O et de côté égal à OM
- ☐ b. carré de centre O et de côté égal à $2 OM$
- ☐ c. cercle de centre O et de rayon égal à OM
- ☐ d. cercle de centre O et de rayon égal à $2 OM$

8 Déterminer la norme du champ magnétique créé en M par le conducteur de la question 9.

- ☐ a. $\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 I}{2OM^2}$
- ☐ b. $\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 I}{2\pi OM^2}$
- ☐ c. $\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 I}{2OM}$
- ☐ d. $\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 I}{2\pi OM}$

Voir corrigés page [312](#)

Dipôles (MPSI)

Thèmes abordés

Avec ce questionnaire, vous évaluez vos connaissances sur les sujets suivants :

- Le dipôle électrostatique, le moment dipolaire électrique.
- Le champ et le potentiel créés.
- Les actions subies.

Consignes

QCM

Il peut y avoir, pour certaines questions, deux propositions exactes.

- 1** Soit un doublet constitué d'une charge positive q située au point P de coordonnées cartésiennes $(0, 0, a)$ et d'une charge $-q$ située au point N de coordonnées $(0, 0, -a)$. Définir le moment dipolaire $\vec{p}$ de cette distribution.

- ☐ a. $\vec{p} = q\vec{PN}$ ☐ b. $\vec{p} = 2q\vec{PN}$
☐ c. $\vec{p} = q\vec{NP}$ ☐ d. $\vec{p} = 2q\vec{NP}$

- 2** Déterminer pour un point M tel que $OM \gg a$ le potentiel électrostatique créé par un dipôle situé au point O , de moment dipolaire $\vec{p}$, en fonction de $p = \|\vec{p}\|$, $r = OM$ et $\theta = \left(\vec{p}, \widehat{\vec{OM}}\right)$.

- ☐ a. $V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r}$ ☐ b. $V = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r}$
☐ c. $V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ☐ d. $V = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

- 3** Déterminer pour le dipôle de la question 2 la composante du champ électrique sur le vecteur unitaire $\vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{r}$.

☐ a. $E_r = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ☐ b. $E_r = \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^2}$

☐ c. $E_r = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ ☐ d. $E_r = \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}$

- 4** Déterminer pour le dipôle de la question 2 la composante du champ électrique sur le vecteur unitaire $\vec{u}_\theta$ des coordonnées sphériques.

Rappel

$\vec{u}_\theta$ est dans le plan méridien contenant l'axe Oz et le point M . Il est orthogonal à $\vec{u}_r$ et est orienté suivant les angles θ croissants.

☐ a. $E_\theta = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ☐ b. $E_\theta = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

☐ c. $E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ☐ d. $E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

- 5** Déterminer la norme du champ électrostatique à grande distance sur l'axe Oz et sur le plan xOy .

☐ a. sur Oz $\|\vec{E}\| = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ ☐ b. sur Oz $\|\vec{E}\| = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3}$

☐ c. sur xOy $\|\vec{E}\| = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ ☐ d. sur xOy $\|\vec{E}\| = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3}$

- 6** **Approfondissement.** Déterminer les actions subies par un dipôle de moment dipolaire $\vec{p}$ dans un champ extérieur uniforme $\vec{E}_{ext}$.

☐ a. $\vec{F} = p\vec{E}_{ext}$ ☐ b. $\vec{F} = \vec{0}$

☐ c. $\vec{\Gamma}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}$ ☐ d. $\vec{\Gamma}_O = \vec{E}_{ext} \wedge \vec{p}$

7 **Approfondissement.** Déterminer l'énergie potentielle E d'un dipôle de moment dipolaire $\vec{p}$ dans un champ extérieur uniforme $\vec{E}_{ext}$ et en déduire la position d'équilibre stable du dipôle.

☐ a. $E = \vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}$

☐ b. $E = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}$

☐ c. dipôle aligné sur les lignes de champ, dans le sens du champ.

☐ d. dipôle aligné sur les lignes de champ, dans le sens opposé au champ.

8 Déterminer le moment dipolaire de la distribution constituée d'une charge $2q$ au point origine O , et de deux charges $-q$ aux points $A(a, 0, 0)$ et $B(-a, 0, 0)$ en coordonnées cartésiennes.

☐ a. $\vec{p} = 2qa\vec{u}_x$ ☐ b. $\vec{p} = -2qa\vec{u}_x$

☐ c. $\vec{p} = 4qa\vec{u}_x$ ☐ d. $\vec{p} = \vec{0}$

9 Déterminer pour un point M de coordonnées $(x, 0, 0)$ le potentiel électrostatique créé par la distribution de la question 8 à grande distance. On gardera le premier terme non nul du développement en $\frac{x}{a}$.

☐ a. $V(M) \simeq \frac{-2qa^2}{4\pi\epsilon_0 x^3}$ ☐ b. $V(M) \simeq \frac{2qa^2}{4\pi\epsilon_0 x^3}$

☐ c. $V(M) \simeq \frac{-2qa^2}{4\pi\epsilon_0 x^2}$ ☐ d. $V(M) \simeq \frac{2qa^2}{4\pi\epsilon_0 x^2}$

Voir corrigés page 315

26 Distributions de charges – Champ électrostatique

VRAI/FAUX

1 Invariances et symétries

☒ V ☐ F a. Le champ électrique créé par une distribution de charges possède les mêmes propriétés d'invariance et de symétrie que les charges.

C'est le principe de Curie.

☐ V ☒ F b. En tout point d'un plan de symétrie d'une distribution de charges, le champ électrique est perpendiculaire à ce plan.

Le champ électrique est perpendiculaire aux plans d'antisymétrie et tangent aux plans de symétrie de la distribution des charges.

☒ V ☐ F c. Une distribution de charges possédant un plan d'antisymétrie est forcément neutre électriquement.

C'est vrai, puisque pour chaque charge de la distribution existe la charge opposée de l'autre côté du plan d'antisymétrie. En sommant toutes les charges, le résultat est une charge totale nulle.

☐ V ☒ F d. Le champ électrique créé par un système neutre électriquement est nul en tout point de l'espace.

Il est très facile de trouver un contre-exemple : soient deux charges ponctuelles opposées. Au milieu les champs électriques créés par chacune d'elles sont identiques et donc se renforcent au lieu de se compenser.

QCM

2 Soit une distribution volumique de charges composée d'une charge ponctuelle $q = e$ située au point O et d'une densité volumique dépendant de la distance r au point O : $\rho(r) = -\frac{e}{4\pi ar^2} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$, e étant la charge élémentaire et a une constante positive. Déterminer la charge dq comprise entre deux sphères de rayons r et $r + dr$.

☐ a. $dq = -\frac{e}{3a} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) dr$ ☐ b. $dq = -\frac{er}{3a} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$

☒ c. $dq = -\frac{e}{a} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) dr$ ☐ d. $dq = -\frac{er}{a} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$

Le volume compris entre les deux sphères de rayons r et $r + dr$ est égal à $4\pi r^2 dr$ (surface de la sphère de rayon r multipliée par l'épaisseur dr). La charge correspondante est $dq = \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr = -\frac{4\pi er^2 dr}{4\pi ar^2} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$ donc $dq = -\frac{e}{a} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) dr$.

3 Déterminer la charge totale Q de la distribution décrite à la question 2.

- ☒ a. $Q = e$ ☐ b. $Q = 2e$ ☐ c. $Q = -e$ ☒ d. $Q = 0$

Pour obtenir la charge totale il faut intégrer le résultat précédent sur tout l'espace sans oublier la charge ponctuelle à l'origine : $Q = e + \int_0^{\infty} -\frac{e}{a} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) dr$ d'où $Q = e + \left[e \cdot \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \right]_0^{\infty} = e + 0 - e = 0$.

4 Soit une boule de centre O , de rayon R , chargée en volume avec une densité volumique uniforme ρ_0 pour $x > 0$ et une densité volumique uniforme $-\rho_0$ pour $x < 0$. Étudier les symétries de cette distribution.

- ☒ a. xOz est plan de symétrie. ☐ b. xOz est plan d'antisymétrie.
☐ c. yOz est plan de symétrie. ☒ d. yOz est plan d'antisymétrie.

Le plan d'équation $x = 0$ est plan d'antisymétrie pour la boule : il s'agit du plan yOz . Par ailleurs tout plan contenant l'axe Ox est plan de symétrie, donc en particulier le plan xOz .

5 Déterminer la direction du champ électrique créé par la distribution de la question 4 au centre de la boule.

- ☒ a. $\vec{E}(O)$ est parallèle à Ox . ☐ b. $\vec{E}(O)$ est parallèle à Oy .
☐ c. $\vec{E}(O)$ est parallèle à Oz . ☐ d. $\vec{E}(O)$ est nul.

Le champ électrique est perpendiculaire au plan d'antisymétrie en tout point de ce plan. Or le centre de la boule appartient au plan yOz donc en O le champ électrique est parallèle à Ox .

6 Soit une distribution surfacique de charges telle que le plan $y = a$ porte une densité uniforme σ_0 et le plan $y = -a$ une densité uniforme $-\sigma_0$. Déterminer la direction du champ électrique au point M de coordonnées $(x = a, y = 0, z = -a)$.

- ☐ a. $\vec{E}(M)$ est parallèle à Ox . ☒ b. $\vec{E}(M)$ est parallèle à Oy .
☐ c. $\vec{E}(M)$ est parallèle à Oz . ☐ d. $\vec{E}(M)$ est nul.

Le plan d'équation $y = 0$ est plan d'antisymétrie de la distribution. Au point de coordonnées $(x = a, y = 0, z = -a)$ qui appartient au plan d'antisymétrie le champ lui est perpendiculaire donc $\vec{E}(M)$ est parallèle à Oy .

7 Déterminer les plans de symétrie pour la distribution de charges constituée d'un anneau circulaire de centre O et de rayon R dans le plan xOy , portant une densité linéique uniforme $\lambda_0 > 0$. En déduire la direction du champ électrique en tout point M de l'axe Oz .

- ☐ a. $\vec{E}(M)$ est parallèle à Ox . ☐ b. $\vec{E}(M)$ est parallèle à Oy .
☒ c. $\vec{E}(M)$ est parallèle à Oz . ☐ d. $\vec{E}(M)$ est nul.

L'axe Oz est axe de symétrie de révolution pour l'anneau. Tous les plans contenant Oz sont plans de symétrie de la distribution. Le champ électrique sur l'axe Oz étant tangent à tous ces plans, il est parallèle à Oz .

8 Déterminer la norme du champ électrique créé par l'anneau décrit à la question précédente en un point de l'axe de l'anneau situé à une distance D du plan de l'anneau.

- ☐ a. $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0 R}{2\epsilon_0 (R^2 + D^2)}$ ☒ b. $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0 R D}{2\epsilon_0 (R^2 + D^2)^{3/2}}$
☐ c. $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0 D}{2\epsilon_0 (R^2 + D^2)}$ ☐ d. $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0}{2\epsilon_0 \sqrt{R^2 + D^2}}$

D'après la loi de Coulomb et en superposant tous les champs élémentaires créés par de

petits éléments dl de l'anneau au voisinage de P , $\vec{E}(M) = \int_{\text{anneau}} \frac{\lambda_0 dl \vec{PM}}{4\pi\epsilon_0 (PM)^3}$.

On a montré à la question précédente que l'unique composante non nulle du champ électrique est suivant l'axe Oz . En projetant sur cet axe, $E_z = \int_{\text{anneau}} \frac{\lambda_0 dl \cdot z_M}{4\pi\epsilon_0 (PM)^3} =$

$\int_{\text{anneau}} \frac{\lambda_0 dl \cdot z_M}{4\pi\epsilon_0 (\sqrt{R^2 + z_M^2})^3} = \frac{\lambda_0 \cdot z_M}{4\pi\epsilon_0 (\sqrt{R^2 + z_M^2})^3} \int_{\text{anneau}} dl$ en sortant tous les termes constants de l'intégrale.

On arrive donc à $E_z = \frac{\lambda_0 \cdot z_M}{4\pi\epsilon_0 (\sqrt{R^2 + z_M^2})^3} 2\pi R = \frac{\lambda_0 R z_M}{2\epsilon_0 (\sqrt{R^2 + z_M^2})^3}$ et la norme de $\vec{E}$ à une distance D sur l'axe est égale à $\frac{\lambda_0 R D}{2\epsilon_0 (R^2 + D^2)^{3/2}}$.

9 Soit un disque de rayon R uniformément chargé en surface avec la densité uniforme $\sigma_0 > 0$. On considère ce disque comme une juxtaposition de rubans circulaires de centre O , de rayon $r \in [0, R]$ et de largeur dr . Déterminer le lien entre la densité linéique λ_0 équivalente portée par le ruban de rayon r et σ_0 .

- ☒ a. $\sigma_0 = \frac{\lambda_0}{dr}$ ☐ b. $\sigma_0 = \frac{\lambda_0}{2\pi dr}$
☐ c. $\sigma_0 = \lambda_0 dr$ ☐ d. $\sigma_0 = 2\pi\lambda_0 dr$

Le ruban de rayon r et de largeur dr porte une charge $dq = \sigma_0 ds = \sigma_0 2\pi r dr$. Si on l'assimile à une distribution linéique, c'est-à-dire à un fil, la charge correspondante est $dq = \lambda_0 l = \lambda_0 2\pi r$.

Par identification entre les deux expressions, $\lambda_0 = \sigma_0 dr$.

- 10** Dédurre des questions 8 et 9 la norme du champ électrique en un point de l'axe du disque situé à une distance D du plan du disque.

☐ a. $\|\vec{E}\| = \frac{\sigma_0 D}{2\epsilon_0 \sqrt{R^2 + D^2}}$ ☒ b. $\|\vec{E}\| = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{D}{\sqrt{R^2 + D^2}}\right)$

☐ c. $\|\vec{E}\| = \frac{\sigma_0 R}{2\epsilon_0 \sqrt{R^2 + D^2}}$ ☐ d. $\|\vec{E}\| = \frac{\sigma_0 R}{2\epsilon_0 D}$

Si on décompose le disque en rubans circulaires, chaque ruban produit au point M sur l'axe Oz un champ élémentaire colinéaire à l'axe Oz de composante $dE_z = \frac{\sigma_0 z_M r dr}{2\epsilon_0 (\sqrt{r^2 + z_M^2})^3}$ (en remplaçant dans le résultat précédent R par r et λ_0 par $\sigma_0 dr$). Par su-

perposition : $E_z = \int_0^R \frac{\sigma_0 z_M r dr}{2\epsilon_0 (\sqrt{r^2 + z_M^2})^3} = \frac{\sigma_0 z_M}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z_M^2)^{3/2}} = \frac{\sigma_0 z_M}{2\epsilon_0} \left[\frac{-1}{(r^2 + z_M^2)^{1/2}} \right]_0^R$

Donc pour $z_M = D$, $\|\vec{E}\| = \frac{\sigma_0 D}{2\epsilon_0} \left(-\frac{1}{\sqrt{R^2 + D^2}} + \frac{1}{\sqrt{D^2}} \right) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{D}{\sqrt{R^2 + D^2}} \right)$.

- 11** À partir du résultat de la question 10 déterminer la norme du champ électrique en un point situé à une distance D d'un plan infini uniformément chargé en surface avec une densité $\sigma_0 > 0$.

☐ a. $\|\vec{E}\| = \frac{\sigma_0}{4\epsilon_0}$ ☐ b. $\|\vec{E}\| = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}$

☒ c. $\|\vec{E}\| = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}$ ☐ d. $\|\vec{E}\| = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$

On considère le plan infini comme un disque dont le rayon tend vers l'infini : alors d'après le résultat de la question précédente, $\|\vec{E}\| \rightarrow \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} (1 - 0)$

- 12** Déterminer en tout point de l'axe Ox la direction du champ créé par un fil infini confondu avec l'axe Oz portant une densité linéique uniforme λ_0 .

☒ a. $\vec{E}(O)$ est parallèle à Ox . ☐ b. $\vec{E}(O)$ est parallèle à Oy .

☐ c. $\vec{E}(O)$ est parallèle à Oz . ☐ d. $\vec{E}(O)$ est nul.

Tout plan contenant l'axe Oz est plan de symétrie de la distribution. Le plan xOz est donc plan de symétrie. Le plan xOy est lui aussi plan de symétrie du fil infini. L'axe Ox est l'intersection de ces deux plans de symétrie, donc sur l'axe Ox le champ électrique, tangent aux plans de symétrie, est colinéaire à Ox .

- 13** Déterminer en tout point de l'axe Ox la norme du champ créé par un fil infini confondu avec l'axe Oz portant une densité linéique uniforme λ_0 .

☐ a. $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 |x|}$ ☐ b. $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 |x|}$

☐ c. $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0}{\pi\epsilon_0 |x|}$ ☒ d. $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 |x|}$

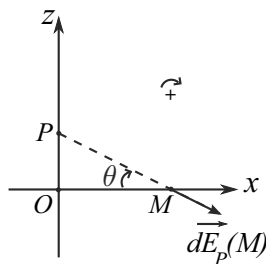
D'après la loi de Coulomb et en superposant tous les champs élémentaires créés par de

petits éléments dl de l'axe Oz , $\vec{E}(M) = \int_{P \in \text{axe}} \frac{\lambda_0 dl \vec{PM}}{4\pi\epsilon_0 (PM)^3}$.

On a montré à la question précédente que l'unique composante non nulle du champ électrique est suivant l'axe Ox . En projetant sur cet axe,

$$E_x = \int_{\text{axe}} \frac{\lambda_0 dl \cdot (x_M - x_P)}{4\pi\epsilon_0 (PM)^3} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda_0 dz_P \cdot x_M}{4\pi\epsilon_0 (\sqrt{x_M^2 + z_P^2})^3} = \frac{\lambda_0 x_M}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz_P}{(\sqrt{x_M^2 + z_P^2})^3}.$$

Pour calculer cette intégrale il faut faire un changement de variable :



posons $\tan \theta = \frac{z_P}{x_M}$: on obtient $E_x = \frac{\lambda_0 x_M}{4\pi\epsilon_0 |x_M|^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz_P}{(\sqrt{1 + (\tan \theta)^2})^3}$ avec $dz_P = \frac{x_M}{\cos^2 \theta} d\theta$.

Alors $E_x = \frac{\lambda_0 x_M^2}{4\pi\epsilon_0 |x_M|^3} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta (\sqrt{1 + (\tan \theta)^2})^3} = \frac{\lambda_0 x_M^2}{4\pi\epsilon_0 |x_M|^3} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \theta d\theta$.

Finalement, $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 |x_M|} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 |x_M|}$.

- 14** Déterminer en tout point de l'axe Oy la direction du champ créé par un fil infini confondu avec l'axe Oz portant une densité linéique λ_0 pour $z > 0$ et $-\lambda_0$ pour $z < 0$.

☐ a. $\vec{E}(O)$ est parallèle à Ox . ☐ b. $\vec{E}(O)$ est parallèle à Oy .

☒ c. $\vec{E}(O)$ est parallèle à Oz . ☐ d. $\vec{E}(O)$ est nul.

Le plan xOy est plan d'antisymétrie de la distribution, et l'axe Oy est dans ce plan, donc en tout point de l'axe Oy , le champ électrique est perpendiculaire à xOy , il est donc parallèle à Oz .

- 15** Déterminer en tout point de l'axe Oy la norme du champ créé par un fil infini confondu avec l'axe Oz portant une densité linéique λ_0 pour $z > 0$ et $-\lambda_0$ pour $z < 0$.

☐ a. $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0}{\pi\epsilon_0 |y|}$ ☒ b. $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 |y|}$

☐ c. $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 |y|}$ ☐ d. $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 |y|}$

On détermine séparément le champ créé par chaque demi-axe, et on superpose les deux résultats.

Pour $z > 0$, $\vec{E}_1(M) = \int_{z_P > 0} \frac{\lambda_0 d\vec{l} \overrightarrow{PM}}{4\pi\epsilon_0 (PM)^3}$ et en projetant $E_{1z} = \int_{z_P > 0} \frac{\lambda_0 dz_P (z_M - z_P)}{4\pi\epsilon_0 (PM)^3}$.

$$E_{1z} = \int_0^{+\infty} \frac{-\lambda_0 z_P dz_P}{4\pi\epsilon_0 (z_P^2 + y_M^2)^{3/2}} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{z_P^2 + y_M^2}} \right]_0^{+\infty} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \left(0 - \frac{1}{\sqrt{y_M^2}} \right) = \frac{-\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 |y_M|}.$$

Pour $z < 0$, $\vec{E}_2(M) = \int_{z_P < 0} \frac{-\lambda_0 d\vec{l} \overrightarrow{PM}}{4\pi\epsilon_0 (PM)^3}$ et donc $E_{2z} = \int_{z_P < 0} \frac{-\lambda_0 dz_P (z_M - z_P)}{4\pi\epsilon_0 (PM)^3}$.

$$E_{2z} = \int_{-\infty}^0 \frac{\lambda_0 z_P dz_P}{4\pi\epsilon_0 (z_P^2 + y_M^2)^{3/2}} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-1}{\sqrt{z_P^2 + y_M^2}} \right]_{-\infty}^0 = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-1}{\sqrt{y_M^2}} + 0 \right) = \frac{-\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 |y_M|}.$$

On obtient le même résultat, ce qui est conforme aux symétries de la distribution.

Le champ électrique total a pour module $\frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 |y_M|}$, il est dirigé en sens inverse de l'axe Oz .

27 Flux et circulation du champ électrostatique

VRAI/FAUX

1 Propriétés du champ électrostatique

☒ V ☐ F a. La circulation du champ électrostatique ne dépend pas du chemin suivi entre deux points.

La propriété est simple à démontrer pour le champ créé par une charge ponctuelle :

$$\int_A^B \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r \cdot d\vec{l}}{r^2} = \int_A^B \frac{qdr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B}$$
 Le résultat ne dépend que des positions de A et B.

Elle se généralise ensuite pour toute distribution de charges en superposant les champs créés par chaque charge. On dit que $\vec{E}$ est à circulation conservative.

☐ V ☒ F b. Si on connaît l'expression du potentiel $V(z)$ en tout point de l'axe Oz , on peut en déduire le vecteur champ électrique en tout point de cet axe.

Le champ et le potentiel sont liés par la relation : $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}(V(M))$. Pour calculer les dérivées partielles de $V(M)$ par rapport aux coordonnées autres que z , il faut connaître la fonction $V(M)$ en dehors de l'axe Oz .

☒ V ☐ F c. Le flux du vecteur $\vec{E}$ à travers une surface fermée ne dépend que de la charge totale contenue à l'intérieur de cette surface, indépendamment de la position des charges.

Il s'agit du théorème de Gauss.

☐ V ☒ F d. Si une distribution de charges est à symétrie sphérique de centre O , on peut calculer le champ $\vec{E}$ en tout point de l'espace comme si les charges étaient rassemblées au centre.

Cette propriété n'est vraie qu'à l'extérieur de la distribution. Elle est démontrée par application du théorème de Gauss, et les seules charges que l'on fait intervenir sont celles contenues à l'intérieur de la surface à travers laquelle on calcule le flux de $\vec{E}$.

QCM

2 On considère une distribution de charges constituée d'un anneau circulaire de centre O et de rayon R dans le plan xOy , portant une charge totale Q répartie de façon uniforme. Déterminer le potentiel électrique au point M sur l'axe Oz .

☐ a. $V(M) = \frac{\lambda_0 R}{2\epsilon_0 z_M}$

☐ b. $V(M) = \frac{\lambda_0 R}{2\epsilon_0 |z_M|}$

☒ c. $V(M) = \frac{\lambda_0 R}{2\epsilon_0 \sqrt{z_M^2 + R^2}}$

☐ d. $V(M) = \frac{\lambda_0 R^2}{2\epsilon_0 (z_M^2 + R^2)}$

Le potentiel élémentaire au point M créé par un élément de l'anneau de longueur $dl = R d\theta$ au voisinage du point P est égal à $dV = \frac{\lambda_0 dl}{4\pi\epsilon_0 PM}$.

Le point M étant sur l'axe Oz , $dV = \frac{\lambda_0 R d\theta}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z_M^2 + R^2}}$.

Par superposition, $V(M) = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_0 R d\theta}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z_M^2 + R^2}} = \frac{\lambda_0 R}{2\epsilon_0 \sqrt{z_M^2 + R^2}}$.

3 Peut-on déduire de la question précédente que le champ électrique sur l'axe Oz est colinéaire à Oz ? Utiliser le potentiel pour déterminer la norme du champ.

☐ a. Oui.

☒ b. Non.

☐ c. $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0 R}{2\epsilon_0 z_M^2}$

☒ d. $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0 R |z|}{2\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}$

Le potentiel n'est connu que sur l'axe Oz : ce n'est pas suffisant pour en déduire les composantes du champ électrique. On peut déduire de la question précédente uniquement la composante E_z sur l'axe Oz .

La direction du champ sur l'axe Oz peut être déterminée en utilisant les propriétés de symétrie de la distribution : tout plan contenant l'axe Oz étant plan de symétrie, le champ sur l'axe, tangent à tous ces plans, est nécessairement colinéaire à l'axe Oz .

Ceci permet, à partir du potentiel sur l'axe et connaissant la direction du champ, de calculer son module : en effet $E_z(0, 0, z) = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\lambda_0 R}{2\epsilon_0} \frac{z}{(\sqrt{z^2 + R^2})^3}$ donc $\|\vec{E}\| = \frac{\lambda_0 R |z|}{2\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}$.

4 On considère une distribution de charges constituée d'un disque de centre O et de rayon R dans le plan xOy , portant une charge totale Q répartie uniformément sur la surface du disque. Déterminer le potentiel électrique au point M sur l'axe Oz .

☐ a. $V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 OM}$

☐ b. $V(M) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 OM}$

☐ c. $V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{OM^2 + R^2}}$

☒ d. $V(M) = \frac{Q(\sqrt{OM^2 + R^2} - OM)}{2\pi R^2 \epsilon_0}$

La répartition surfacique portée par le disque a pour densité de charge uniforme $\sigma_0 = \frac{Q}{\pi R^2}$. Le potentiel élémentaire au point M créé par un élément du disque de surface $dS = r dr d\theta$ au voisinage du point P est égal à $dV = \frac{\sigma_0 dS}{4\pi\epsilon_0 PM}$.

Au point M sur l'axe Oz , $dV = \frac{\sigma_0 dS}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z_M^2 + r^2}} = \frac{\sigma_0 r dr d\theta}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z_M^2 + r^2}}$.

Par superposition, $V(M) = \iint_{\text{disque}} \frac{\sigma_0 r dr d\theta}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z_M^2 + r^2}} = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{z_M^2 + r^2}}.$

On intègre par rapport à θ puis par rapport à r et on remplace σ_0 :

$$V(M) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{z_M^2 + r^2}} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{z_M^2 + r^2} \right]_0^R = \frac{Q}{2\pi R^2 \epsilon_0} \left(\sqrt{z_M^2 + R^2} - |z_M| \right).$$

- 5** Déterminer la composante E_z du champ créé sur l'axe du disque de la question précédente, au point de coordonnées $(0, 0, R)$.

☐ a. $E_z = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ ☐ b. $E_z = \frac{Q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 R^2}$
☐ c. $E_z = \frac{Q}{2\pi R^2 \epsilon_0}$ ☒ d. $E_z = \frac{Q}{2\pi R^2 \epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$

On a calculé à la question précédente le potentiel en tout point de l'axe Oz , on peut en déduire la composante E_z :

$$E_z(0, 0, z) = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{Q}{2\pi R^2 \epsilon_0} \frac{d}{dz} \left(\sqrt{z_M^2 + R^2} - |z_M| \right).$$

Cas $z > 0$: $E_z(0, 0, z) = \frac{Q}{2\pi R^2 \epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right].$

Pour $z = R$, $E_z(0, 0, R) = \frac{Q}{2\pi R^2 \epsilon_0} \left[1 - \frac{R}{\sqrt{2R^2}} \right] = \frac{Q}{2\pi R^2 \epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$

- 6** Une sphère creuse de centre O et de rayon R est uniformément chargée en surface avec la densité $\sigma_0 > 0$. Déterminer en tout point M de l'espace tel que $OM = r$ la direction du champ électrique et en déduire la surface à choisir pour appliquer le théorème de Gauss.

- ☐ a. $\vec{E}$ est tangent à la sphère de centre O et de rayon r .
☒ b. $\vec{E}$ est perpendiculaire à la sphère de centre O et de rayon r .
☒ c. La surface de Gauss est une sphère de centre O et de rayon r .
☐ d. La surface de Gauss est une sphère de centre O et de rayon R .

Tout plan passant par le centre de la sphère est plan de symétrie de la distribution. En un point M quelconque de l'espace le champ électrique est tangent à ces plans de symétrie, il est donc colinéaire au vecteur $\vec{OM}$.

On peut aussi raisonner à partir de la forme des équipotentiels : la distribution ne dépendant que de la distance au point O , il en est de même pour le potentiel. Les équipotentiels sont donc des sphères, et le champ électrique est partout perpendiculaire aux équipotentiels, ce qui conduit au même résultat.

Pour un calcul simple du flux, il faut choisir une surface sur laquelle la norme du champ est uniforme, et à laquelle le vecteur champ soit perpendiculaire : il s'agit de la sphère de centre O passant par le point M .

- 7** Déterminer pour la distribution précédente la norme du champ électrique à l'intérieur (E_{int}) et à l'extérieur (E_{ext}) de la sphère.

☒ a. $E_{int} = 0$ ☐ b. $E_{int} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$
☐ c. $E_{ext} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$ ☒ d. $E_{ext} = \frac{\sigma_0 R^2}{\varepsilon_0 r^2}$

D'après le théorème de Gauss, $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$.

Or le flux de $\vec{E}$ à travers la sphère vaut $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E_r(r)$.

Si $r < R$, $Q_{int} = 0$ donc $4\pi r^2 E_r(r) = 0$.

Si $r > R$, $Q_{int} = 4\pi R^2 \sigma_0$ donc $4\pi r^2 E_r(r) = \frac{4\pi R^2 \sigma_0}{\varepsilon_0}$.

- 8** Une boule de centre O et de rayon R est uniformément chargée en volume. La charge totale est égale à Q . Déterminer en fonction de $r = OM$ la norme du champ électrique à l'intérieur (E_{int}) et à l'extérieur (E_{ext}) de la boule.

☒ a. $E_{int} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$ ☐ b. $E_{int} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$
☒ c. $E_{ext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ ☐ d. $E_{ext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

La géométrie est la même que pour l'exemple précédent ; on utilise donc la même surface de Gauss et $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$.

Si $r > R$, $Q_{int} = Q$ donc $4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$. Tout se passe alors comme si la charge était ponctuelle et située au centre de la boule.

Si $r < R$, $Q_{int} = \frac{4\pi r^3 \rho_0}{3}$ en appelant ρ_0 la densité volumique de charge égale à $\frac{3Q}{4\pi R^3}$ donc $4\pi r^2 E_r(r) = \frac{4\pi r^3}{3} \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$ soit en simplifiant : $E_r(r) = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$.

- 9** Déterminer pour la distribution précédente le potentiel électrique en tout point de l'espace.

☐ a. $V_{int} = -\frac{Qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$ ☒ b. $V_{int} = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R} - \frac{Qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$
☐ c. $V_{ext} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ ☒ d. $V_{ext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Le champ et le potentiel ne dépendant que de $r = OM$, ils sont liés par $E_r(r) = -\frac{dV}{dr}$.

On détermine d'abord le potentiel à l'extérieur de la boule pour utiliser la condition à l'infini : $\frac{dV}{dr} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ d'où $V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$, qui tend bien vers zéro si r tend vers l'infini.

À l'intérieur de la boule $\frac{dV}{dr} = -\frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ donc $V(r) = -\frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} + \alpha$ où α est une constante à déterminer grâce à la continuité du potentiel pour $r = R$: $V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = -\frac{QR^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} + \alpha$ donc $\alpha = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R}$.

- 10** L'axe Oz est supposé uniformément chargé avec la densité linéique λ_0 . Déterminer en tout point de l'espace la direction du champ électrique.

- ☐ a. $\vec{E}$ est parallèle à Oz . ☒ b. $\vec{E}$ est radial.
☐ c. $\vec{E}$ est orthoradial. ☐ d. On ne peut pas prévoir la direction de $\vec{E}$.

Le plan contenant Oz et le point M est plan de symétrie, ainsi que le plan perpendiculaire à Oz passant par M . Le champ est tangent à ces deux plans, il est donc radial.

- 11** Déterminer avec les hypothèses de la question 10 la norme du champ électrique et le potentiel en tout point M de l'espace situé à une distance r de l'axe Oz . On notera V_0 la valeur du potentiel à une distance R_0 de l'axe.

- ☒ a. $\|\vec{E}\| = \frac{|\lambda_0|}{2\pi\epsilon_0 r}$ ☐ b. $\|\vec{E}\| = \frac{|\lambda_0|}{4\pi\epsilon_0 r}$
☒ c. $V = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_0}{r}\right) + V_0$ ☐ d. $V = -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R_0}\right) + V_0$

D'après le théorème de Gauss, $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$ en choisissant comme surface de Gauss un cylindre passant par M , de hauteur H , d'axe Oz , et fermé par deux disques perpendiculaires à Oz . Le flux du champ à travers chacun des deux disques est nul puisque $\vec{E}$ leur est tangent. La relation obtenue est donc $2\pi r H E_r(r) = \frac{\lambda_0 H}{\epsilon_0}$ soit en simplifiant $E_r(r) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 r}$.

On en déduit, comme $E_r(r) = -\frac{dV}{dr}$, que $V(r) = -\frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R_0}\right) + V_0$.

- 12** Des charges sont uniformément réparties sur tout le plan xOy avec une densité surfacique σ_0 . Déterminer la direction du champ électrique en tout point de l'espace.

- ☐ a. $\vec{E}$ est parallèle à Ox . ☐ b. $\vec{E}$ est parallèle à Oy .
☒ c. $\vec{E}$ est parallèle à Oz . ☐ d. $\vec{E}$ est parallèle à $\vec{OM}$.

Il y a invariance de la distribution par translation suivant les axes Ox et Oy , donc le champ et le potentiel ne dépendent que de z . Les équipotentielles sont les plans parallèles à xOy , le champ électrique qui leur est perpendiculaire est partout colinéaire à l'axe Oz .

- 13** Déterminer la norme du champ électrique créé par la distribution de la question 12 en tout point de l'espace.

☐ a. $\|\vec{E}\| = \frac{|\sigma_0|}{\varepsilon_0}$ ☒ b. $\|\vec{E}\| = \frac{|\sigma_0|}{2\varepsilon_0}$

☐ c. $\|\vec{E}\| = \frac{|\sigma_0|}{4\varepsilon_0}$ ☐ d. $\|\vec{E}\| = \frac{|\sigma_0|}{6\varepsilon_0}$

Choisissons comme surface de Gauss un parallélépipède symétrique de part et d'autre du plan xOy .

Appliquons le théorème de Gauss : $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$.

Les seules contributions au flux total sont celles des deux faces parallèles à xOy puisque le champ est tangent aux autres faces. De plus, xOy étant plan de symétrie, $E_z(-z) = -E_z(z)$.

En tenant compte de l'orientation vers l'extérieur du vecteur $d\vec{S}$, le flux élémentaire du côté $z > 0$ est $d\phi_+ = \vec{E} \cdot d\vec{S} = (E_z(z)\vec{u}_z) \cdot (dxdy\vec{u}_z)$. Le flux élémentaire sur la face symétrique est $d\phi_- = \vec{E} \cdot d\vec{S} = (E_z(-z)\vec{u}_z) \cdot (-\vec{u}_z)dxdy$. On a donc $d\phi_- = (-E_z(z)\vec{u}_z) \cdot (-\vec{u}_z)dxdy = d\phi_+$ et les flux élémentaires sont identiques sur ces deux faces. Les deux flux non nuls ont donc la même valeur.

Finalement, $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2E_z(z)S = \frac{\sigma_0 S}{\varepsilon_0}$ avec $z > 0$ donc $E_z(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$ pour $z > 0$ et par symétrie $E_z(z) = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$ pour $z < 0$. On remarque que la composante E_z subit une discontinuité de $E_z(z) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$ à la traversée du plan chargé.

- 14** Déterminer le potentiel électrique créé par la distribution de la question 12 en tout point de l'espace en prenant comme convention $V = 0$ sur le plan xOy .

☒ a. $V = -\frac{\sigma_0 |z|}{2\varepsilon_0}$ ☐ b. $V = \frac{\sigma_0 |z|}{2\varepsilon_0}$

☐ c. $V = -\frac{\sigma_0 |z|}{4\varepsilon_0}$ ☐ d. $V = \frac{\sigma_0 |z|}{4\varepsilon_0}$

Le champ et le potentiel ne dépendant que de z , ils sont liés par $E_z(z) = -\frac{dV}{dz}$. Pour $z > 0$, $E_z(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$ donc $V(z) = -\frac{\sigma_0 z}{2\varepsilon_0}$ et pour $z < 0$, $E_z(z) = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$ donc $V(z) = +\frac{\sigma_0 z}{2\varepsilon_0}$.

28 Mouvements de particules chargées

VRAI/FAUX

1 Généralités

☐ V ☒ F a. Une particule chargée peut augmenter sa vitesse grâce à un champ magnétique uniforme.

La force magnétique est $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, donc la puissance de cette force est $P = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0$. L'énergie cinétique de la particule est donc constante et $v = cte$.

☐ V ☒ F b. Dans un champ électrique uniforme, la trajectoire d'une particule chargée est circulaire.

La trajectoire est parabolique ou rectiligne. C'est le même type d'équation différentielle que pour une masse dans le champ de pesanteur uniforme.

☒ V ☐ F c. Dans un champ électrique uniforme, la trajectoire d'une particule peut être rectiligne.

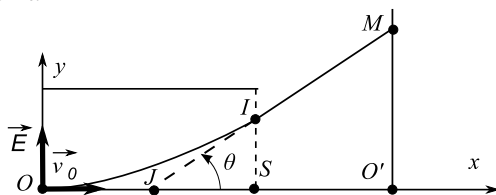
Si la particule est initialement au repos ou si sa vitesse initiale est colinéaire au champ, alors sa trajectoire est rectiligne selon la direction du champ.

☐ V ☒ F d. Dans un champ magnétique uniforme, la trajectoire d'une particule peut être rectiligne.

Soit la particule est immobile et la force magnétique est nulle, soit la particule a une vitesse initiale et la trajectoire est une hélice d'axe la direction du champ. Si la vitesse initiale est perpendiculaire au champ, la trajectoire est un cercle, d'axe parallèle au champ.

QCM

2 On considère une zone de l'espace de longueur $L = OS$ plongée dans un champ électrique uniforme $\vec{E} = E\vec{u}_y$, avec $E > 0$. Une particule de charge $q > 0$ et masse m pénètre dans la zone en O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$. Déterminer la position de I et la vitesse de la particule en ce point.



☐ a. $y_I = \frac{EL}{mv_0}$ ☒ b. $y_I = \frac{qEL}{mv_0}$

☐ c. $y_I = \frac{EL^2}{2mv_0^2}$ ☒ d. $y_I = \frac{qEL^2}{2mv_0^2}$

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit $m\vec{a} = q\vec{E}$. Il n'y a pas de force suivant Oz , donc la quantité de mouvement est conservée suivant cette direction, elle reste donc nulle et le mouvement a lieu dans le plan xOy . En projection sur les axes on a

donc $\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = qE \end{cases}$, ce qui donne par intégration $\begin{cases} \dot{x} = v_0 \\ m\dot{y} = qEt \end{cases}$ et enfin $\begin{cases} x = v_0 t \\ my = \frac{qEt^2}{2} \end{cases}$. En I,

$x_I = L$ donc $t_I = L/v_0$. On reporte dans les autres expressions ce qui donne $y_I = \frac{qEL^2}{2mv_0^2}$, et

$\dot{y}_I = \frac{qEL}{mv_0}$.

- 3** Pour continuer le problème précédent, on note D la distance SO' entre la zone où règne le champ électrique et le plan où l'on détecte la particule en M . Le champ électrique est supposé nul après I . Déterminer $\tan \theta$ sachant que le segment JI est tangent à la trajectoire en I et déterminer la distance $Y = O'M$.

☒ a. $\tan \theta = \frac{qEL}{mv_0^2}$ ☐ b. $\tan \theta = \frac{qEL}{2mv_0^2}$

☐ c. $Y = \frac{qE(L+D)^2}{2mv_0^2}$ ☒ d. $Y = \left(\frac{L}{2} + D\right) \frac{qEL}{mv_0^2}$

Le coefficient directeur de la tangente en I , c'est-à-dire $\tan \theta$ est donnée par $\tan \theta = \frac{\dot{y}_I}{\dot{x}_I}$, soit

$\tan \theta = \frac{qEL}{mv_0^2}$. Avec $JS = IS / \tan \theta$, on en déduit $JS = \frac{y_I}{\tan \theta} = \frac{L}{2}$. On peut alors déterminer

$Y = JO' \tan \theta$, ce qui donne $Y = \left(\frac{L}{2} + D\right) \frac{qEL}{mv_0^2}$.

- 4** Une particule de charge $q > 0$ et masse m , située à l'origine O , a une vitesse initiale $\vec{v}_0$ dans le plan xOz , faisant un angle α avec Ox . Il règne dans cet espace un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_z$ uniforme. On pose $\omega_c = qB/m$. Écrire les équations différentielles du mouvement projetées sur les axes.

☐ a. $\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = qvB \end{cases}$ ☐ b. $\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -qBv_0 \sin \alpha \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$

☒ c. $\begin{cases} m\ddot{x} = qB\dot{y} \\ m\ddot{y} = -qB\dot{x} \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$ ☐ d. $\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = qB \end{cases}$

La force magnétique s'écrit $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ soit $\vec{f} = q \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} qB\dot{y} \\ -qB\dot{x} \\ 0 \end{vmatrix}$. La relation

fondamentale de la dynamique $m\vec{a} = \vec{f}$ conduit à la réponse c.

5 Établir une équation différentielle uniquement pour x et une autre uniquement pour y .

☐ a. $\ddot{x} - \omega_c^2 x = 0$ ☒ b. $\ddot{x} + \omega_c^2 x = 0$

☒ c. $\ddot{y} + \omega_c^2 y = -v_0 \omega_c \cos \alpha$ ☐ d. $\ddot{y} + \omega_c^2 y = 0$

Après division par m , l'intégration de l'équation différentielle $m\ddot{x} = qB\dot{y}$ donne $\dot{x} = \omega_c y + cte$, or initialement $\dot{x} = v_0 \cos \alpha$ et $y = 0$, donc finalement $\dot{x} = \omega_c y + v_0 \cos \alpha$. On reporte dans l'équation en $\ddot{y}$ ce qui donne :

$$\ddot{y} + \omega_c^2 y = -v_0 \omega_c \cos \alpha$$

On procède de manière similaire pour l'autre équation. L'intégration de $m\ddot{y} = -qB\dot{x}$ mène à $\dot{y} = -\omega_c x + cte$, or initialement $\dot{y} = 0$ et $x = 0$, donc $cte = 0$. En reportant dans l'équation en $\ddot{x}$, on établit :

$$\ddot{x} + \omega_c^2 x = 0$$

6 Déterminer l'équation de la trajectoire projetée dans le plan xOy .

☐ a. $x = \frac{v_0 \cos \alpha}{\omega_c} \cos \omega_c t$ ☒ b. $x = \frac{v_0 \cos \alpha}{\omega_c} \sin \omega_c t$

☒ c. $y = \frac{v_0 \cos \alpha}{\omega_c} (\cos \omega_c t - 1)$ ☐ d. $y = \frac{v_0 \cos \alpha}{\omega_c} \cos \omega_c t$

La solution générale pour x est $x = A_1 \cos \omega_c t + A_2 \sin \omega_c t$, avec, à $t = 0$, $x = 0$ et $\dot{x} = v_0 \cos \alpha$, on trouve $x = \frac{v_0 \cos \alpha}{\omega_c} \sin \omega_c t$.

Pour y , la solution générale est $y = A'_1 \cos \omega_c t + A'_2 \sin \omega_c t - v_0 \cos \alpha / \omega_c$. À $t = 0$, $y = 0$ et $\dot{y} = 0$, ce qui donne $y = \frac{v_0 \cos \alpha}{\omega_c} (\cos \omega_c t - 1)$.

7 Une particule de charge $q > 0$ et masse m , située à l'origine O , a une vitesse initiale $\vec{v}_0$ selon Oz . Il règne dans cet espace un champ électrique $\vec{E} = E\vec{u}_x$, uniforme et un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_x$ uniforme. On pose $\omega_c = qB/m$. Écrire les équations différentielles du mouvement projetées sur les axes.

☒ a. $\begin{cases} m\ddot{x} = qE \\ m\ddot{y} = q\dot{z}B \\ m\ddot{z} = -q\dot{y}B \end{cases}$ ☐ b. $\begin{cases} m\ddot{x} = q(E + B) \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$

☐ c. $\begin{cases} m\ddot{x} = qE \\ m\ddot{y} = qv_0 B \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$ ☐ d. $\begin{cases} m\ddot{x} = q(E + v_0 B) \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit $m\vec{a} = qE\vec{u}_x + q\vec{v} \wedge \vec{B}$ avec la force magnétique $q \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ qB\dot{z} \\ -qB\dot{y} \end{vmatrix}$. La réponse **a** est juste.

- 8** On veut résoudre le système formé des équations en y et z par les complexes. On pose $\underline{C} = y + iz$. Déterminer l'équation différentielle en $\underline{C}$.

☒ a. $\ddot{\underline{C}} + i\omega_c \dot{\underline{C}} = 0$ ☐ b. $\ddot{\underline{C}} - i\omega_c \dot{\underline{C}} = 0$

☐ c. $\ddot{\underline{C}} - \omega_c \dot{\underline{C}} = 0$ ☐ d. $\ddot{\underline{C}} = 0$

Les dérivées première et seconde de $\underline{C}$ s'écrivent $\dot{\underline{C}} = \dot{y} + i\dot{z}$ et $\ddot{\underline{C}} = \ddot{y} + i\ddot{z}$. En ajoutant l'équation en $\ddot{y}$ et celle $\ddot{z}$ multipliée par i , on obtient : $\ddot{\underline{C}} = \omega_c(\dot{z} - i\dot{y})$. On factorise par $-i$ pour obtenir : $\ddot{\underline{C}} = -i\omega_c(\dot{y} + i\dot{z})$ soit $\ddot{\underline{C}} + i\omega_c \dot{\underline{C}} = 0$.

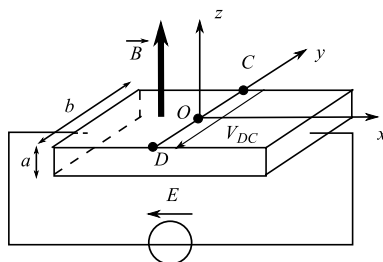
- 9** Déterminer les équations paramétriques du mouvement de la particule.

☐ a. $\begin{cases} x = qEt^2/2m \\ y = v_0(1 - \cos \omega_c t)/\omega_c \\ z = -v_0(\sin \omega_c t)/\omega_c \end{cases}$ ☐ b. $\begin{cases} x = qEt^2/2m \\ y = v_0(\cos \omega_c t - 1)/\omega_c \\ z = -v_0(\sin \omega_c t)/\omega_c \end{cases}$

☐ c. $\begin{cases} x = qEt^2/2m \\ y = v_0(\sin \omega_c t)/\omega_c \\ z = v_0(\cos \omega_c t - 1)/\omega_c \end{cases}$ ☒ d. $\begin{cases} x = qEt^2/2m \\ y = v_0(1 - \cos \omega_c t)/\omega_c \\ z = v_0(\sin \omega_c t)/\omega_c \end{cases}$

Pour l'équation sur Ox , on intègre deux fois sachant que $\dot{x}(0) = 0$ et $x(0) = 0$ ce qui aboutit à $x = \frac{qEt^2}{2m}$. L'intégration de l'équation $\ddot{\underline{C}} + i\omega_c \dot{\underline{C}} = 0$ donne $\dot{\underline{C}} = \underline{A}e^{-i\omega_c t}$ or à $t = 0$, $\dot{y} = 0$ et $\dot{z} = v_0$, ce qui entraîne $\dot{\underline{C}}(0) = \underline{A} = iv_0$. On intègre de nouveau pour obtenir $\underline{C}$, soit $\underline{C} = \frac{iv_0}{-i\omega_c}e^{-i\omega_c t} + \underline{cte}$. Or, $\underline{C}(0) = y(0) + iz(0) = 0$ d'où la solution finale $\underline{C} = \frac{v_0}{\omega_c}(1 - e^{-i\omega_c t})$. On arrive finalement à la solution **d** avec $y = \text{Re}(\underline{C})$ et $z = \text{Im}(\underline{C})$.

- 10** Une plaquette contenant n porteurs de charge libre par unité de volume de charge $q > 0$ est soumise à un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$. La plaquette est aussi branchée sur une f.e.m. E constante. On note I l'intensité circulant dans la plaquette en régime permanent. Les différentes autres grandeurs utiles sont définies sur le schéma. Déterminer le champ électrique $\vec{E}_H$ (champ de Hall) apparaissant selon Oy en régime permanent ainsi que la tension V_{DC} correspondante.



☐ a. $\vec{E}_H = \frac{IB}{nqab}\vec{u}_x$ ☒ b. $\vec{E}_H = \frac{IB}{nqab}\vec{u}_y$

☐ c. $V_{DC} = -\frac{IB}{nqa}$ ☒ d. $V_{DC} = \frac{IB}{nqa}$

On peut relier l'intensité à la densité de courant par $I = j ab$, or par définition $\vec{j} = nq\vec{v}$ où v est la vitesse des porteurs de charges ; on en déduit que $\vec{v} = \frac{I}{nqab}\vec{u}_x$. La force magnétique s'exerçant sur une charge est $\vec{f}_B = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, donc le champ électrique (de Hall) qui permet au courant de circuler suivant Ox en régime permanent est $\vec{E}_H$ tel que $\vec{f}_B + q\vec{E}_H = \vec{0}$, d'où $\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}$, ou $\vec{E}_H = vB\vec{u}_y$. On calcule la circulation de $\vec{E}_H$ de D à C :

$$V_{DC} = \int_C^D dV = - \int_C^D \vec{E}_H \cdot d\vec{\ell} = - \frac{IB}{nqab} \int_{y_C}^{y_D} dy = - \frac{IB}{nqa} \int_{b/2}^{-b/2} dy = \frac{IB}{nqa}$$

- 11** Deux conducteurs cylindriques de rayons respectifs r_1 et $r_2 > r_1$, de hauteur h , sont séparés par un milieu de conductivité γ . On suppose les effets de bord négligeables. Déterminer la résistance R entre les deux cylindres.

☐ a. $R = \frac{1}{\gamma} \frac{r_2 - r_1}{2\pi r_1 h}$ ☐ b. $R = -\frac{1}{2\pi h \gamma} \ln \frac{r_2}{r_1}$

☒ c. $R = \frac{1}{2\pi h \gamma} \ln \frac{r_2}{r_1}$ ☐ d. $R = \frac{1}{\gamma} \frac{r_2 - r_1}{2\pi r_2 h}$

On nomme Oz l'axe du cylindre. On note I l'intensité du courant et U la tension entre le conducteur intérieur et le conducteur extérieur. Il y a invariance par rotation d'axe Oz , et aussi par translation selon cet axe puisqu'on néglige les effets de bord. Le vecteur densité de courant est radial $\vec{j} = j(r)\vec{u}_r$ et puisque pour r , la surface traversée par le courant est $S(r) = 2\pi rh$, on a $j(r) = I/2\pi rh$. Ainsi le champ électrique s'écrit $\vec{E} = \frac{I}{2\pi rh \gamma} \vec{u}_r$. On peut alors calculer la circulation entre le bord intérieur et le bord extérieur :

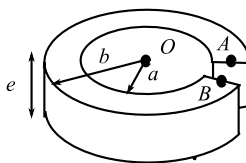
$$U = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{I}{2\pi h \gamma} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{I}{2\pi h \gamma} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

D'où $R = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi h \gamma} \ln \frac{r_2}{r_1}$.

On peut aussi utiliser l'expression de la résistance d'un fil en prenant ici comme résistance élémentaire l'espace compris entre le cylindre de rayon r et celui de rayon $r + dr$. Dans ce cas la longueur de la résistance est dr et sa surface $S(r) = 2\pi rh$, donc la résistance élémentaire est $dR = \frac{1}{\gamma} \frac{dr}{2\pi rh}$. Toutes ces résistances élémentaires sont traversées par la

même intensité I , elles sont donc en série et $R = \int_{r_1}^{r_2} dR$: on retrouve le même résultat.

- 12** On considère le conducteur de la figure, de conductivité γ . On néglige l'épaisseur de la coupure entre A et B : les lignes de courants sont des cercles concentriques de centre O ($\vec{j} = j(r)\vec{u}_\theta$). Déterminer la conductance entre les faces A et B . On néglige tout effet de bord.



☒ a. $G = \frac{\gamma e}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$ ☐ b. $G = \gamma \frac{e(b-a)}{2\pi a}$

☐ c. $G = -\frac{\gamma e}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$ ☐ d. $G = \gamma \frac{e(b-a)}{2\pi b}$

L'intensité I traversant une section de normale $\vec{u}_\theta$ est $I = \int_a^b j(r) e dr$. D'autre part, le champ

électrique est $\vec{E} = \vec{j}(r)/\gamma$, il ne dépend donc que de r et est orthoradial. La tension $U_{AB} = V_A - V_B$ est obtenue par la circulation de $\vec{E}$ le long de n'importe quel cercle de rayon

r , soit $U_{AB} = - \int_B^A E(r) r d\theta$, comme on néglige l'épaisseur de la coupure, $\theta \in [0, 2\pi]$ et

$U_{AB} = E(r)r \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r E(r)$. On reporte l'expression dans I et on obtient :

$$I = \int_a^b \frac{\gamma U_{AB}}{2\pi r} e dr = U_{AB} \frac{\gamma e}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \text{ soit } G = \frac{I}{U_{AB}} = \frac{\gamma e}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Une deuxième méthode consiste à utiliser les lois d'association. On découpe le conducteur en conductances élémentaires comprises entre le cylindre de rayon r et le cylindre de rayon $r + dr$. Ce conducteur a une longueur égale au périmètre du cercle $\ell = 2\pi r$ et une section $dS = e dr$, sa conductance est donc $dG = \gamma \frac{dS}{\ell} = \gamma \frac{e dr}{2\pi r}$. Les conducteurs élémentaires sont les uns à côté des autres, soumis à la même tension mais non parcourus par le même

courant ; ils sont en parallèle, donc les conductances s'ajoutent et $G = \int_a^b \gamma \frac{e dr}{2\pi r}$, on retrouve

le même résultat que précédemment.

29 Champ magnétostatique

VRAI/FAUX

1 Symétries

- ☐ V ☒ F a. Une spire circulaire de courant comporte une infinité de plans de symétrie.

Attention, les plans contenant l'axe de symétrie du cercle sont des plans d'antisymétrie pour la boucle de courant ; le seul plan de symétrie de cette distribution est le plan contenant le cercle.

- ☒ V ☐ F b. Un plan de symétrie des courants est plan d'antisymétrie du champ magnétique.

Le comportement du champ magnétique vis-à-vis des plans de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution est différent de celui du champ électrique. Cette propriété est liée à la présence d'un produit vectoriel dans la loi de Biot et Savart donnant l'expression du champ magnétique créé par un élément de conducteur : $d\vec{B}_P(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi PM^3} d\vec{l} \wedge \vec{PM}$.

- ☒ V ☐ F c. Le champ magnétique est perpendiculaire aux plans de symétrie d'une distribution de courants.

Le champ magnétique est tangent aux plans d'antisymétrie d'une distribution de courants.

2 Flux et circulation

- ☐ V ☒ F a. Le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est égal à la somme algébrique des courants intérieurs multipliée par μ_0 .

Le flux du champ magnétique à travers toute surface fermée est nul ; il n'existe pas d'analogue du théorème de Gauss en magnétostatique.

- ☒ V ☐ F b. La circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé est égale à la somme algébrique des courants traversant le contour multipliée par μ_0 .

Il s'agit de l'énoncé du théorème d'Ampère. Il faut orienter le conducteur de façon arbitraire et tenir compte de l'orientation des conducteurs enlacés par le contour (règle du tire-bouchon).

QCM

- 3 On considère une spire circulaire d'axe Oz parcourue par un courant d'intensité I . Étudier les symétries de la distribution de courant et en déduire la direction du champ magnétique sur l'axe de la spire.

- ☐ a. xOz est plan de symétrie. ☒ b. yOz est plan d'antisymétrie.
☒ c. $\vec{B}$ est parallèle à Oz . ☐ d. $\vec{B}$ est perpendiculaire à Oz .

Tout plan contenant l'axe Oz est plan d'antisymétrie du courant, donc en particulier yOz est plan d'antisymétrie de la distribution. Le champ magnétique, qui est tangent à tous les plans d'antisymétrie, est donc colinéaire à Oz en tout point de cet axe.

- 4** Calculer la norme du champ magnétique sur l'axe d'une spire circulaire de rayon R , parcourue par un courant d'intensité I , à une distance D du centre de la spire.

☐ a. $\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 DI}{2(R^2 + D^2)}$ ☐ b. $\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 ID^2}{2(R^2 + D^2)^{3/2}}$
☐ c. $\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 RI}{2(R^2 + D^2)}$ ☒ d. $\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + D^2)^{3/2}}$

D'après la loi de Biot et Savart, le champ magnétique créé au point M par un élément de circuit $d\vec{l}$ orienté dans le sens du courant au voisinage du point P est donné par la relation $d\vec{B}_P(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi PM^3} d\vec{l} \wedge \vec{PM}$.

En prenant comme plan polaire le plan de la spire, on peut écrire que $d\vec{l} = R d\theta \vec{u}_\theta$ et que $\vec{PM} = -R\vec{u}_\rho + z_M\vec{u}_z$ donc la projection sur l'axe Oz du produit vectoriel $d\vec{l} \wedge \vec{PM}$ est égale à $R^2 d\theta$. En superposant les champs élémentaires, la composante de $\vec{B}$ sur Oz est donc égale à $\int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 IR^2 d\theta}{4\pi PM^3}$. Finalement $B_z = \frac{\mu_0 IR^2}{4\pi PM^3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\mu_0 IR^2}{2 \left(\sqrt{R^2 + z_M^2} \right)^3}$ et c'est la seule composante non nulle sur l'axe.

- 5** Soit un segment de conducteur filiforme de longueur L , colinéaire à l'axe Oz , parcouru par un courant d'intensité I . Déterminer la direction du champ magnétique au point M du plan médiateur du segment.

☐ a. $\vec{B}$ est radial. ☒ b. $\vec{B}$ est orthoradial.
☐ c. $\vec{B}$ est parallèle à Oz . ☐ d. On ne peut pas prévoir la direction de $\vec{B}$.

Le plan contenant le segment et le point M est plan de symétrie de la distribution, et le champ magnétique lui est perpendiculaire. Il est donc orthoradial. La propriété est d'ailleurs vraie pour tout point M , y compris en dehors du plan médiateur.

- 6** Déterminer pour la distribution de courants de la question 7 la norme du champ magnétique au point M du plan médiateur à une distance D du segment.

☒ a. $B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi D} \frac{L}{\sqrt{4D^2 + L^2}}$ ☐ b. $B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi D} \frac{L}{\sqrt{D^2 + L^2}}$
☐ c. $B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi D}$ ☐ d. $B_\theta = \frac{\mu_0 IL}{2\pi D^2}$

D'après la loi de Biot et Savart, $d\vec{B}_P(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi PM^3} d\vec{l} \wedge \vec{PM}$ et sa composante non nulle en coordonnées cylindriques a pour expression : $dB_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi PM^3} (d\vec{l} \wedge \vec{PM}) \cdot \vec{u}_\theta$
 $= \frac{\mu_0 ID}{4\pi PM^3} dz_P = \frac{\mu_0 ID}{4\pi (\sqrt{D^2 + z_P^2})^3} dz_P$ et donc $B_\theta = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\mu_0 ID}{4\pi (\sqrt{D^2 + z_P^2})^3} dz_P$

Une intégrale similaire a été calculée à la question 13 du chapitre 26 grâce à un changement de variable. Posons $\tan \theta = \frac{z_P}{D}$ et $u = \text{Arc tan} \left(\frac{L}{2D} \right)$

on obtient $B_\theta = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\mu_0 ID}{4\pi D^3 (\sqrt{1 + \tan^2 \theta})^3} dz_P$ avec $dz_P = \frac{D}{\cos^2 \theta} d\theta$.

Alors $B_\theta = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\mu_0 ID \cos^3 \theta}{4\pi D^3} \frac{D}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi D} \int_{-u}^u \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi D} \sin u$.

Finalement, $B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi D} \frac{L}{2\sqrt{D^2 + \frac{L^2}{4}}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi D} \frac{L}{\sqrt{4D^2 + L^2}}$.

7 On considère un fil infini colinéaire à l'axe Oz , parcouru par un courant d'intensité I orienté dans le même sens que l'axe. On souhaite déterminer le champ magnétique en tout point M du plan xOy . Quel contour est-il judicieux d'utiliser pour appliquer le théorème d'Ampère ?

- ☐ a. carré de centre O et de côté égal à OM
- ☐ b. carré de centre O et de côté égal à $2OM$
- ☒ c. cercle de centre O et de rayon égal à OM
- ☐ d. cercle de centre O et de rayon égal à $2OM$

Pour déterminer l'expression du champ magnétique à partir du théorème d'Ampère, il faut disposer d'un contour tangent au champ magnétique, le long duquel la norme du champ soit constant. Ici la distribution est invariante par translation parallèlement à Oz et par rotation autour de cet axe, donc le champ magnétique ne dépend que de la distance du point M à l'axe. Le plan contenant M et l'axe est plan de symétrie, donc $\vec{B}$ est orthoradial. Le cercle d'axe Oz passant par M est un contour permettant de déterminer la norme du champ.

8 Déterminer la norme du champ magnétique créé en M par le conducteur de la question 9.

- ☐ a. $\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 I}{2OM^2}$
- ☐ b. $\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 I}{2\pi OM^2}$
- ☐ c. $\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 I}{2OM}$
- ☒ d. $\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 I}{2\pi OM}$

D'après l'étude menée à la question 9, on utilise le théorème d'Ampère. On choisit une orientation arbitraire du contour dans le sens trigonométrique qui est alors traversé dans le sens positif par le conducteur.

Théorème d'Ampère : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$.

La circulation élémentaire $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ est égale à $B_\theta(r) \cdot r d\theta$ en notant r la distance de M à l'axe, avec r constant sur le cercle. On obtient donc $\int_0^{2\pi} B_\theta(r) \cdot r d\theta = \mu_0 I$ et finalement $B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

Comme M est dans le plan xOy , $r = OM$.

30 Dipôles

- 1** Soit un doublet constitué d'une charge positive q située au point P de coordonnées cartésiennes $(0, 0, a)$ et d'une charge $-q$ située au point N de coordonnées $(0, 0, -a)$. Définir le moment dipolaire $\vec{p}$ de cette distribution.

☐ a. $\vec{p} = q\vec{PN}$ ☐ b. $\vec{p} = 2q\vec{PN}$

☒ c. $\vec{p} = q\vec{NP}$ ☐ d. $\vec{p} = 2q\vec{NP}$

Le moment dipolaire est dirigé de la charge négative vers la charge positive, sa norme est le produit de la distance entre les deux particules par la charge positive donc $\vec{p} = q\vec{NP}$.

- 2** Déterminer pour un point M tel que $OM \gg a$ le potentiel électrostatique créé par un dipôle situé au point O , de moment dipolaire $\vec{p}$, en fonction de $p = \|\vec{p}\|$, $r = OM$ et $\theta = (\vec{p}, \widehat{OM})$.

☐ a. $V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r}$ ☐ b. $V = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r}$

☒ c. $V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ☐ d. $V = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

Le potentiel au point M est la somme des potentiels dus à chaque charge :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 PM} + \frac{(-q)}{4\pi\epsilon_0 NM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM} \right).$$

Or $PM = \sqrt{(\vec{OM} - \vec{OP})^2}$ avec $\vec{OM} = r\vec{u}_r$ et $\vec{OP} = a\vec{u}_z$ d'où on déduit que $(\vec{OM} - \vec{OP})^2 = r^2 - 2ra\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z + a^2 = r^2 - 2ra \cos \theta + a^2 = r^2 \left(1 - 2\frac{a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{r^2} \right)$ donc

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{r \left(1 - 2\frac{a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{r^2} \right)^{1/2}} = \frac{1}{r} \left(1 - 2\frac{a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{r^2} \right)^{-1/2}.$$

À grande distance, $\frac{a}{r} \ll 1$ et on peut approximer au premier ordre que $\left(1 - 2\frac{a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{a \cos \theta}{r}$ donc $\frac{1}{PM} \simeq \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a \cos \theta}{r}\right)$.

On procède de même pour obtenir l'expression approchée au premier ordre de $\frac{1}{NM}$, avec cette fois-ci $\overrightarrow{ON} = -a\vec{u}_z$ et on arrive à $\frac{1}{NM} \simeq \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a \cos \theta}{r}\right)$.

En combinant les deux résultats,
$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{a \cos \theta}{r} - \left[1 - \frac{a \cos \theta}{r}\right]\right)$$

$$= \frac{2aq \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

3 Déterminer pour le dipôle de la question 2 la composante du champ électrique sur le vecteur unitaire $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$.

☐ a. $E_r = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ☐ b. $E_r = \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^2}$

☐ c. $E_r = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ ☒ d. $E_r = \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}$

Le champ et le potentiel électrostatiques sont liés par la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ donc en coordonnées sphériques $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^2}\right) = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$.

4 Déterminer pour le dipôle de la question 2 la composante du champ électrique sur le vecteur unitaire $\vec{u}_\theta$ des coordonnées sphériques.

Rappel

$\vec{u}_\theta$ est dans le plan méridien contenant l'axe Oz et le point M . Il est orthogonal à $\vec{u}_r$ et est orienté suivant les angles θ croissants.

☐ a. $E_\theta = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ☐ b. $E_\theta = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

☐ c. $E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ☒ d. $E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

En coordonnées sphériques, $E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{d}{d\theta} (\cos \theta) = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$.

- 5** Déterminer la norme du champ électrostatique à grande distance sur l'axe Oz et sur le plan xOy .

☐ a. sur Oz $\|\vec{E}\| = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ ☒ b. sur Oz $\|\vec{E}\| = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3}$

☒ c. sur xOy $\|\vec{E}\| = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ ☐ d. sur xOy $\|\vec{E}\| = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3}$

Sur l'axe Oz , $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ donc $E_r = \frac{\pm p}{2\pi\epsilon_0 r^3}$ et $E_\theta = 0$. La norme du champ est alors égale à $\frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3}$.

Sur le plan xOy , $\theta = \frac{\pi}{2}$ donc $E_r = 0$ et $E_\theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}$. La norme du champ est alors égale à $\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}$.

- 6** Déterminer les actions subies par un dipôle de moment dipolaire $\vec{p}$ dans un champ extérieur uniforme $\vec{E}_{ext}$.

☐ a. $\vec{F} = p\vec{E}_{ext}$ ☒ b. $\vec{F} = \vec{0}$

☒ c. $\vec{\Gamma}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}$ ☐ d. $\vec{\Gamma}_O = \vec{E}_{ext} \wedge \vec{p}$

La résultante des forces subies est égale à $\vec{F} = q\vec{E}_{ext}(P) - q\vec{E}_{ext}(N)$. Le champ extérieur étant uniforme par hypothèse, $\vec{F} = \vec{0}$.

Le moment résultant en O se calcule à partir de l'expression :

$$\vec{\Gamma}_O = \vec{OP} \wedge (q\vec{E}_{ext}(P)) + \vec{ON} \wedge (-q\vec{E}_{ext}(N)).$$

Pour un champ extérieur uniforme : $\vec{\Gamma}_O = q(\vec{OP} - \vec{ON}) \wedge \vec{E}_{ext} = q\vec{NP} \wedge \vec{E}_{ext} = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}$.

- 7** Déterminer l'énergie potentielle E d'un dipôle de moment dipolaire $\vec{p}$ dans un champ extérieur uniforme $\vec{E}_{ext}$ et en déduire la position d'équilibre stable du dipôle.

☐ a. $E = \vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}$

☒ b. $E = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}$

☒ c. dipôle aligné sur les lignes de champ, dans le sens du champ.

☐ d. dipôle aligné sur les lignes de champ, dans le sens opposé au champ.

L'énergie potentielle d'une charge q dans un champ électrique $\vec{E}_{ext}$ se met sous la forme qV_{ext} en faisant intervenir le potentiel au point où est située la charge. Ici

$$E = qV_{ext}(P) - qV_{ext}(N) = q(V_{ext}(P) - V_{ext}(N)) = q \int_N^P dV_{ext} = q \int_N^P -\vec{E}_{ext} \cdot d\vec{l}. \text{ Le champ}$$

$$\text{étant uniforme } \int_N^P -\vec{E}_{ext} \cdot d\vec{l} = -\vec{E}_{ext} \cdot \overrightarrow{NP} \text{ d'où } E = q \left(-\vec{E}_{ext} \cdot \overrightarrow{NP} \right) = -\vec{E}_{ext} \cdot \vec{p}.$$

La position d'équilibre stable correspond au minimum de l'énergie potentielle. Appelons α l'angle entre le champ extérieur et le dipôle : $E = - \left\| \vec{E}_{ext} \right\| \cdot \left\| \vec{p} \right\| \cdot \cos \alpha$.

Pour un champ uniforme et un dipôle permanent, l'énergie est minimale quand $\cos \alpha = 1$ c'est-à-dire quand les deux sont parallèles et de même sens : le dipôle s'aligne sur les lignes de champ.

- 8** Déterminer le moment dipolaire de la distribution constituée d'une charge $2q$ au point origine O , et de deux charges $-q$ aux points $A(a, 0, 0)$ et $B(-a, 0, 0)$ en coordonnées cartésiennes.

☐ a. $\vec{p} = 2qa\vec{u}_x$ ☐ b. $\vec{p} = -2qa\vec{u}_x$

☐ c. $\vec{p} = 4qa\vec{u}_x$ ☒ d. $\vec{p} = \vec{0}$

Le barycentre des charges négatives est situé à l'origine du repère, comme l'unique charge positive : le moment dipolaire est donc nul.

- 9** Déterminer pour un point M de coordonnées $(x, 0, 0)$ le potentiel électrostatique créé par la distribution de la question 8 à grande distance. On gardera le premier terme non nul du développement en $\frac{x}{a}$.

☒ a. $V(M) \simeq \frac{-2qa^2}{4\pi\epsilon_0 x^3}$ ☐ b. $V(M) \simeq \frac{2qa^2}{4\pi\epsilon_0 x^3}$

☐ c. $V(M) \simeq \frac{-2qa^2}{4\pi\epsilon_0 x^2}$ ☐ d. $V(M) \simeq \frac{2qa^2}{4\pi\epsilon_0 x^2}$

Le principe du calcul est le même que pour une distribution dipolaire, mais il faut pousser le développement plus loin pour obtenir un terme non nul. Choisissons $x > 0$ pour plus de commodité (de toute façon la distribution est symétrique par rapport à O).

$$V(M) = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 OM} + \frac{(-q)}{4\pi\epsilon_0 AM} + \frac{(-q)}{4\pi\epsilon_0 BM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right)$$

Si on ne garde que l'ordre 1, $(1 + \varepsilon)^{-1} \simeq 1 - \varepsilon$ pour $\varepsilon \ll 1$, ce qui donnerait $V(M) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} \left(2 - \left(1 + \frac{a}{x} \right) - \left(1 - \frac{a}{x} \right) \right) = 0$.

Il faut donc aller plus loin dans le développement : $(1 + \varepsilon)^{-1} \simeq 1 - \varepsilon + \varepsilon^2$ à l'ordre 2, ce qui donne $V(M) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} \left(2 - \left(1 + \frac{a}{x} + \left(\frac{a}{x} \right)^2 \right) - \left(1 - \frac{a}{x} + \left(\frac{a}{x} \right)^2 \right) \right)$ donc $V(M) \simeq \frac{-2q}{4\pi\epsilon_0 x} \left(\frac{a}{x} \right)^2$.

Le potentiel décroît plus vite quand la distance augmente que pour un dipôle.